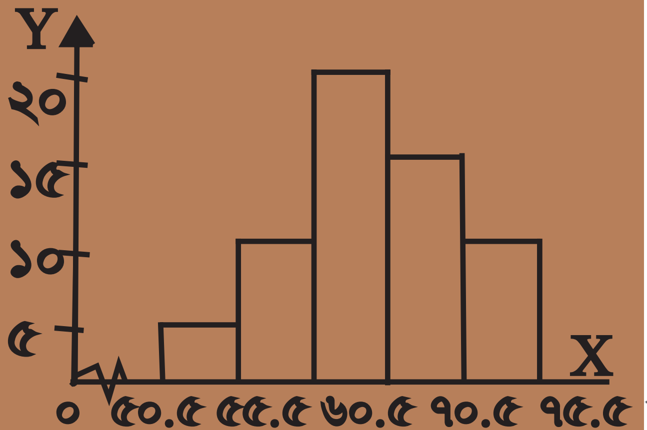
গণিত

নবম-দশম শ্রেণি



জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক ২০১৩ শিক্ষাবর্ষ থেকে
নবম–দশম শ্রেণির পাঠ্যপুস্তকরূপে নির্ধারিত

গণিত

নবম–দশম শ্রেণি

রচনা

সালেহ্ মতিন

ড. অমল হালদার

ড. অমূল্য চন্দ্র মণ্ডল

শেখ কুতুবউদ্দিন

হামিদা বানু বেগম

এ.কে.এম. শহীদুল্লাহ্

মোঃ শাহ্জাহান সিরাজ

সম্পাদনা

ড. মোঃ আবদুল মতিন

ড. আব্দুস ছামাদ

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড
৬৯-৭০ মতিঝিল বাণিজ্যিক এলাকা, ঢাকা-১০০০
কর্তৃক প্রকাশিত।

[প্রকাশক কর্তৃক সর্বস্বত্ব সংরক্ষিত]

প্রথম প্রকাশ : অক্টোবর, ২০১২
পরিমার্জিত সংস্করণ : সেপ্টেম্বর, ২০১৪
পুনর্মুদ্রণ : ২০১৫

পাঠ্যপুস্তক প্রণয়নে সমন্বয়ক
মোঃ নাসির উদ্দিন

প্রচ্ছদ
সুদর্শন বাছার
সুজাউল আবেদীন

চিত্রাঙ্কন
মোঃ কবির হোসেন

ডিজাইন
জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড

কম্পিউটার কম্পোজ
লেজার স্ক্যান লিমিটেড

সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য

মুদ্রণে:

প্রসঙ্গ–কথা

শিক্ষা জাতীয় উন্নয়নের পূর্বশর্ত। আর দ্রুত পরিবর্তনশীল বিশ্বের চ্যালেঞ্জ মোকাবেলা করে বাংলাদেশকে উন্নয়ন ও সমৃদ্ধির দিকে নিয়ে যাওয়ার জন্য প্রয়োজন সুশিক্ষিত জনশক্তি। ভাষা আন্দোলন ও মুক্তিযুদ্ধের চেতনায় দেশ গড়ার জন্য শিক্ষার্থীর অন্তর্নিহিত মেধা ও সম্ভাবনার পরিপূর্ণ বিকাশে সাহায্য করা মাধ্যমিক শিক্ষার অন্যতম লক্ষ্য। এছাড়া প্রাথমিক স্তরে অর্জিত শিক্ষার মৌলিক জ্ঞান ও দক্ষতা সম্প্রসারিত ও সুসংহত করার মাধ্যমে উচ্চতর শিক্ষার যোগ্য করে তোলাও এ স্তরের শিক্ষার উদ্দেশ্য। জ্ঞানার্জনের এই প্রক্রিয়ার ভিতর দিয়ে শিক্ষার্থীকে দেশের অর্থনৈতিক, সামাজিক, সাংস্কৃতিক ও পরিবেশগত পটভূমির প্রেক্ষিতে দক্ষ ও যোগ্য নাগরিক করে তোলাও মাধ্যমিক শিক্ষার অন্যতম বিবেচ্য বিষয়।

জাতীয় শিক্ষানীতি–২০১০ এর লক্ষ্য ও উদ্দেশ্যকে সামনে রেখে পরিমার্জিত হয়েছে মাধ্যমিক স্তরের শিক্ষাক্রম। পরিমার্জিত এই শিক্ষাক্রমে জাতীয় আদর্শ, লক্ষ্য, উদ্দেশ্য ও সমকালীন চাহিদার প্রতিফলন ঘটানো হয়েছে, সেই সাথে শিক্ষার্থীদের বয়স, মেধা ও গ্রহণ ক্ষমতা অনুযায়ী শিখনফল নির্ধারণ করা হয়েছে। এছাড়া শিক্ষার্থীর নৈতিক ও মানবিক মূল্যবোধ থেকে শুরু করে ইতিহাস ও ঐতিহ্য চেতনা, মহান মুক্তিযুদ্ধের চেতনা, শিল্প–সাহিত্য–সংস্কৃতিবোধ, দেশপ্রেমবোধ, প্রকৃতি–চেতনা এবং ধর্ম–বর্ণ–গোত্র ও নারী–পুরুষ নির্বিশেষে সবার প্রতি সমমর্যাদাবোধ জাগ্রত করার চেষ্টা করা হয়েছে। একটি বিজ্ঞানমনস্ক জাতি গঠনের জন্য জীবনের প্রতিটি ক্ষেত্রে বিজ্ঞানের স্বতঃস্ফূর্ত প্রয়োগ ও ডিজিটাল বাংলাদেশের রূপকল্প–২০২১ এর লক্ষ্য বাস্তবায়নে শিক্ষার্থীদের সক্ষম করে তোলার চেষ্টা করা হয়েছে।

নতুন এই শিক্ষাক্রমের আলোকে প্রণীত হয়েছে মাধ্যমিক স্তরের প্রায় সকল পাঠ্যপুস্তক। উক্ত পাঠ্যপুস্তক প্রণয়নে শিক্ষার্থীদের সামর্থ্য, প্রবণতা ও পূর্ব অভিজ্ঞতাকে গুরুত্বের সঙ্গে বিবেচনা করা হয়েছে। পাঠ্যপুস্তকগুলোর বিষয় নির্বাচন ও উপস্থাপনের ক্ষেত্রে শিক্ষার্থীর সৃজনশীল প্রতিভার বিকাশ সাধনের দিকে বিশেষভাবে গুরুত্ব দেওয়া হয়েছে। প্রতিটি অধ্যায়ের শুরুতে শিখনফল যুক্ত করে শিক্ষার্থীর অর্জিতব্য জ্ঞানের ইঙ্গিত প্রদান করা হয়েছে এবং বিচিত্র কাজ, সৃজনশীল প্রশ্ন ও অন্যান্য প্রশ্ন সংযোজন করে মূল্যায়নকে সৃজনশীল করা হয়েছে।

একবিংশ শতকের এই যুগে জ্ঞান–বিজ্ঞানের বিকাশে গণিতের ভূমিকা অতীব গুরুত্বপূর্ণ। শুধু তাই নয়, ব্যক্তিগত জীবন থেকে শুরু করে পারিবারিক ও সামাজিক জীবনে গণিতের প্রয়োগ অনেক বেড়েছে। এই সব বিষয় বিবেচনায় রেখে নিম্নমাধ্যমিক পর্যায়ে নতুন গাণিতিক বিষয় শিক্ষার্থী উপযোগী ও আনন্দদায়ক করে তোলার জন্য গণিতকে সহজ ও সুন্দরভাবে উপস্থাপন করা হয়েছে এবং বেশ কিছু নতুন গাণিতিক বিষয় অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। বানানের ক্ষেত্রে অনুসৃত হয়েছে বাংলা একাডেমি কর্তৃক প্রণীত বানানরীতি।

একবিংশ শতকের অঙ্গীকার ও প্রত্যয়কে সামনে রেখে পরিমার্জিত শিক্ষাক্রমের আলোকে পাঠ্যপুস্তকটি রচিত হয়েছে। শিক্ষাক্রম উন্নয়ন একটি ধারাবাহিক প্রক্রিয়া এবং এর ভিত্তিতে পাঠ্যপুস্তক রচিত হয়। সম্প্রতি যৌক্তিক মূল্যায়ন ও ট্রাই আউট কার্যক্রমের মাধ্যমে সংশোধন ও পরিমার্জন করে পাঠ্যপুস্তকটিকে ত্রুটিমুক্ত করা হয়েছে– যার প্রতিফলন বইটির বর্তমান সংস্করণে পাওয়া যাবে।

পাঠ্যপুস্তকটি রচনা, সম্পাদনা, চিত্রাঙ্কন, নমুনা প্রশ্নাদি প্রণয়ন, পরিমার্জন ও প্রকাশনার কাজে যারা আন্তরিকভাবে মেধা ও শ্রম দিয়েছেন তাঁদের ধন্যবাদ জ্ঞাপন করছি। পাঠ্যপুস্তকটি শিক্ষার্থীদের আনন্দিত পাঠ ও প্রত্যাশিত দক্ষতা অর্জন নিশ্চিত করবে বলে আশা করি।

প্রফেসর নারায়ন চন্দ্র পাল
চেয়ারম্যান
জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা

সূচিপত্র

অধ্যায়	বিষয়বস্তু	পৃষ্ঠা
প্রথম অধ্যায়	বাস্তব সংখ্যা	১
দ্বিতীয় অধ্যায়	সেট ও ফাংশন	২০
তৃতীয় অধ্যায়	বীজগাণিতিক রাশি	৩৮
চতুর্থ অধ্যায়	সূচক ও লগারিদম	৭০
পঞ্চম অধ্যায়	এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ	৮৭
ষষ্ঠ অধ্যায়	রেখা, কোণ ও ত্রিভুজ	১০১
সপ্তম অধ্যায়	ব্যবহারিক জ্যামিতি	১২০
অষ্টম অধ্যায়	বৃত্ত	১৩১
নবম অধ্যায়	ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	১৪৯
দশম অধ্যায়	দূরত্ব ও উচ্চতা	১৭০
একাদশ অধ্যায়	বীজগণিতীয় অনুপাত ও সমানুপাত	১৭৭
দ্বাদশ অধ্যায়	দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ	১৯২
ত্রয়োদশ অধ্যায়	সসীম ধারা	২১৩
চতুর্দশ অধ্যায়	অনুপাত, সদৃশতা ও প্রতিসমতা	২২৬
পঞ্চদশ অধ্যায়	ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত উপপাদ্য ও সম্পাদ্য	২৪০
ষষ্ঠদশ অধ্যায়	পরিমিতি	২৪৮
সপ্তদশ অধ্যায়	পরিসংখ্যান	২৭৬
	উত্তরমালা	২৯৩

প্রথম অধ্যায়

বাস্তব সংখ্যা

(Real Numbers)

পরিমাণকে প্রতীক তথা সংখ্যা আকারে প্রকাশ করার পদ্ধতি থেকেই গণিতের উৎপত্তি। সংখ্যার ইতিহাস মানব সভ্যতার ইতিহাসের মতই প্রাচীন। গ্রিক দার্শনিক এরিস্টটলের মতে, প্রাচীন মিশরের পুরোহিত সম্প্রদায়ের গণিত অনুশীলনের মাধ্যমে গণিতের আনুষ্ঠানিক অভিষেক ঘটে। তাই সংখ্যাভিত্তিক গণিতের সৃষ্টি যীশুখ্রিস্টের জন্মের প্রায় দুই হাজার বছর পূর্বে। এরপর নানা জাতি ও সভ্যতার হাত ঘুরে অধুনা সংখ্যা ও সংখ্যারীতি একটি সার্বজনীন রূপ ধারণ করেছে।

স্বাভাবিক সংখ্যা গণনার প্রয়োজনে প্রাচীন ভারতবর্ষের গণিতবিদগণ সর্বপ্রথম শূন্য ও দশভিত্তিক স্থানীয়মান পদ্ধতির প্রচলন করেন, যা সংখ্যা বর্ণনায় একটি মাইলফলক হিসাবে বিবেচিত। ভারতীয় ও চীনা গণিতবিদগণ শূন্য, ঋণাত্মক, বাস্তব, পূর্ণ ও ভগ্নাংশের ধারণার বিস্তৃতি ঘটান যা মধ্যযুগে আরবীয় গণিতবিদরা ভিত্তি হিসেবে গ্রহণ করেন। দশমিক ভগ্নাংশের সাহায্যে সংখ্যা প্রকাশের কৃতিত্ব মধ্যপ্রাচ্যের মুসলিম গণিতবিদদের বলে মনে করা হয়। আবার তাঁরাই একাদশ শতাব্দীতে সর্বপ্রথম বীজগাণিতীয় দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান হিসেবে বর্গমূল আকারে অমূলদ সংখ্যার প্রবর্তন করেন। ইতিহাসবিদদের ধারণা, খ্রিস্টপূর্ব ৫০০ অব্দের কাছাকাছি সময়ে গ্রিক দার্শনিকরাও জ্যামিতিক অঙ্কনের প্রয়োজনে অমূলদ সংখ্যা, বিশেষ করে দুই–এর বর্গমূলের প্রয়োজনীয়তা অনুভব করেছিলেন। ঊনবিংশ শতাব্দীতে গণিতবিদরা বাস্তব সংখ্যার বৈশিষ্ট্য পরিপূর্ণভাবে বর্ণনা করেন। দৈনন্দিন প্রয়োজনে বাস্তব সংখ্যা সম্বন্ধে শিক্ষার্থীদের সুস্পষ্ট জ্ঞান থাকা প্রয়োজন। এ অধ্যায়ে বাস্তব সংখ্যা বিষয়ে সামগ্রিক আলোচনা করা হয়েছে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- ➢ বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাস করতে পারবে।
- ➢ বাস্তব সংখ্যাকে দশমিকে প্রকাশ করে আসন্ন মান নির্ণয় করতে পারবে।
- ➢ দশমিক ভগ্নাংশের শ্রেণিবিন্যাস ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ➢ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং ভগ্নাংশকে আবৃত্ত দশমিকে প্রকাশ করতে পারবে।
- ➢ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর করতে পারবে।
- ➢ অসীম অনাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ➢ সদৃশ ও বিসদৃশ দশমিক ভগ্নাংশ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ➢ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করতে পারবে এবং এতদসংক্রান্ত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural Number)

$1, 2, 3, 4.........$ ইত্যাদি সংখ্যাগুলোকে স্বাভাবিক সংখ্যা বা ধনাত্মক অখন্ড সংখ্যা বলে। $2, 3, 5, 7.........$ ইত্যাদি মৌলিক সংখ্যা এবং $4, 6, 8, 9,.........$ ইত্যাদি সংখ্যা।

পূর্ণসংখ্যা (Integer)

শূন্যসহ সকল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক অখন্ড সংখ্যাসমূহকে পূর্ণসংখ্যা বলা হয়। অর্থাৎ $.......-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.........$ ইত্যাদি পূর্ণসংখ্যা।

ভগ্নাংশ সংখ্যা (Fractional Number)

p, q পরস্পর সহমৌলিক, $q \neq 0$ এবং $q \neq 1$ হলে, $\frac{p}{q}$ আকারের সংখ্যাকে ভগ্নাংশ সংখ্যা বলে। যেমন : $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-5}{3}$ ইত্যাদি ভগ্নাংশ সংখ্যা।

$p < q$ হলে ভগ্নাংশকে প্রকৃত ভগ্নাংশ এবং $p > q$ হলে ভগ্নাংশকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ বলা হয়। যেমন : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, ...$ ইত্যাদি প্রকৃত ভগ্নাংশ এবং $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, ...$ ইত্যাদি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

মূলদ সংখ্যা (Rational Number)

p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$ হলে, $\frac{p}{q}$ আকারের সংখ্যাকে মূলদ সংখ্যা বলা হয়। যেমন : $\frac{3}{1} = 3, \frac{11}{2} = 5.5, \frac{5}{3} = 1.666...$ ইত্যাদি মূলদ সংখ্যা। মূলদ সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা যায়। সুতরাং সকল পূর্ণসংখ্যা এবং সকল ভগ্নাংশ সংখ্যা হবে মূলদ সংখ্যা।

অমূলদ সংখ্যা (Irrational Number)

যে সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় না, যেখানে p, q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$, সে সংখ্যাকে অমূলদ সংখ্যা বলা হয়। পূর্ণবর্গ নয় এরূপ যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গমূল একটি অমূলদ সংখ্যা। যেমন : $\sqrt{2} = 1.414213.....,\ \sqrt{3} = 1.732.....,\ \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.58113....$ ইত্যাদি অমূলদ সংখ্যা। অমূলদ সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা যায় না।

দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা :

মূলদ সংখ্যা ও অমূলদ সংখ্যাকে দশমিকে প্রকাশ করা হলে একে দশমিক ভগ্নাংশ বলা হয়। যেমন, $3 = 3\cdot0, \frac{5}{2} = 2\cdot5, \frac{10}{3} = 3\cdot3333.......,\ \sqrt{3} = 1\cdot732.........$ ইত্যাদি দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা। দশমিক বিন্দুর পর অঙ্ক সংখ্যা সমীম হলে, এদেরকে সসীম দশমিক ভগ্নাংশ এবং অঙ্ক সংখ্যা অসীম হলে, এদেরকে অসীম দশমিক

ভগ্নাংশ বলা হয়। যেমন, $0\cdot52, 3\cdot4152$ ইত্যাদি সসীম দশমিক ভগ্নাংশ এবং $1\cdot333.......$, $2\cdot123512367..........$ ইত্যাদি অসীম দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা। আবার, অসীম দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যাগুলোর মধ্যে দশমিক বিন্দুর পর অঙ্কগুলো পুনরাবৃত্তি হলে, এদেরকে অসীম আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ এবং অঙ্কগুলো পুনরাবৃত্তি না হলে এদের অসীম অনাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা বলা হয়। যেমন, $1\cdot2323........$, $5\cdot\dot{6}5\dot{4}$ ইত্যাদি অসীম আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ এবং $0\cdot523050056........$, $2\cdot12340314.........$ ইত্যাদি অসীম অনাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ।

বাস্তব সংখ্যা (Real Number)

সকল মূলদ সংখ্যা এবং অমূলদ সংখ্যাকে বাস্তব সংখ্যা বলা হয়। যেমন :

$0, \pm1, \pm2, \pm3,..........$

$\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{4}{3},........$

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}......$

$1\cdot23,\ 0\cdot415,\ 1\cdot3333.......,\ 0\cdot\dot{6}\dot{2},\ 4\cdot120345061..........$ ইত্যাদি বাস্তব সংখ্যা।

ধনাত্মক সংখ্যা (Positive Number)

শূন্য অপেক্ষা বড় সকল বাস্তব সংখ্যাকে ধনাত্মক সংখ্যা বলা হয়।

যেমন, $1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \sqrt{2},\ 0\cdot415,\ 0\cdot\dot{6}\dot{2},\ 4\cdot120345061.............$ ইত্যাদি ধনাত্মক সংখ্যা।

ঋণাত্মক সংখ্যা (Negative Number)

শূন্য অপেক্ষা ছোট সকল বাস্তব সংখ্যাকে ঋণাত্মক সংখ্যা বলা হয়।

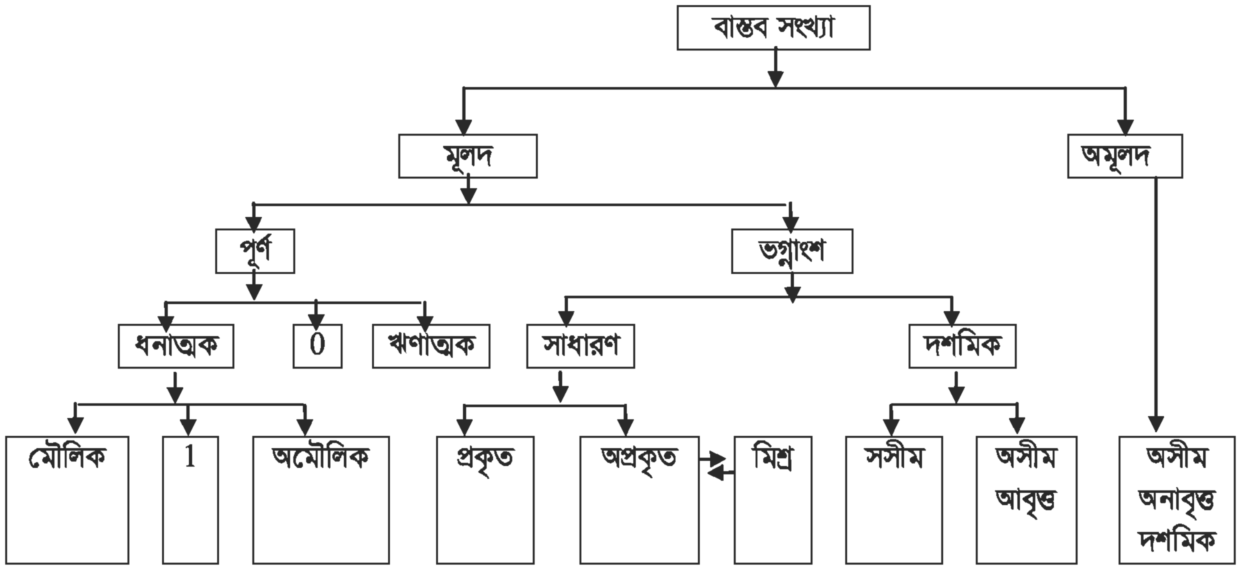
যেমন, $-1,\ -2,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ -\sqrt{2},\ -0\cdot415,\ -0\cdot\dot{6}\dot{2},\ -4\cdot120345061.............$ ইত্যাদি ঋণাত্মক সংখ্যা।

অঋণাত্মক সংখ্যা (Non-negative Number)

শূন্যসহ সকল ধনাত্মক সংখ্যাকে অঋণাত্মক সংখ্যা বলা হয়।

যেমন, $0,\ 3,\ \frac{1}{2},\ \ 0\cdot612,\ 1\cdot\dot{3},\ 2\cdot120345.............$ ইত্যাদি অঋণাত্মক সংখ্যা।

বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাস



কাজ :

$\frac{3}{4}, 5, -7, \sqrt{13}, 0, 1, \frac{9}{7}, 12, 2\frac{4}{5}, 1\cdot1234......, .3\dot{2}\dot{3}$ সংখ্যাগুলোকে বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাসে অবস্থান দেখাও।

উদাহরণ ১। $\sqrt{3}$ এবং 4 এর মধ্যে দুইটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\sqrt{3} = 1.7320508......$

মনে করি, $a = 2.030033000333.....$

এবং $b = 2.505500555.......$

স্পষ্টত : a ও b উভয়ই দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং উভয়ই $\sqrt{3}$ অপেক্ষা বড় এবং 4 অপেক্ষা ছোট।

অর্থাৎ $\sqrt{3} < 2.03003300333......... < 4$

এবং $\sqrt{3} < 2.505500555................ < 4$

আবার, a ও b কে সাধারণ ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা যায় না।

$\therefore$ a ও b দুইটি নির্ণেয় অমূলদ সংখ্যা।

বি.দ্র: এরূপ অসংখ্য অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় করা যায়।

বাস্তব সংখ্যার যোগ ও গুণন প্রক্রিয়ার মৌলিক বৈশিষ্ট্য :

১. a, b বাস্তব সংখ্যা হলে, $(i)\ a+b$ বাস্তব সংখ্যা এবং $(ii)\ ab$ বাস্তব সংখ্যা

২. a, b বাস্তব সংখ্যা হলে, $(i)\ a+b=b+a$ এবং $(ii)\ ab=ba$

৩. a, b, c বাস্তব সংখ্যা হলে, $(i)\ (a+b)+c=a+(b+c)$ এবং $(ii)\ (ab)c=a(bc)$

৪. a বাস্তব সংখ্যা হলে, বাস্তব সংখ্যায় কেবল দুইটি সংখ্যা 0 ও 1 বিদ্যমান যেখানে $(i)\ 0 \neq 1$ $(ii)\ a+0=a$ $(iii)\ a.1=1.a=a$

৫. a বাস্তব সংখ্যা হলে, $(i)\ a+(-a)=0$ $(ii)\ a \neq 0$ হলে, $a.\frac{1}{a}=1$

৬. a, b, c বাস্তব সংখ্যা হলে, $a(b+c)=ab+ac$

৭. a, b বাস্তব সংখ্যা হলে, $a<b$ অথবা $a=b$ অথবা $a>b$

৮. a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a<b$ হলে, $a+c<b+c$

৯. a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a<b$ হলে, $(i)\ ac<bc$ যখন $c>0$ $(ii)\ ac>bc$ হলে, $c<0$

প্রতিজ্ঞা : $\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

আমরা জানি,

$1<2<4$

$\therefore \sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}$

বা, $1<\sqrt{2}<2$

প্রমাণ : $1^2=1,\ (\sqrt{2})^2=2,\ 2^2=4$

সুতরাং $\sqrt{2}$ এর মান 1 অপেক্ষা বড় এবং 2 অপেক্ষা ছোট।

অতএব $\sqrt{2}$ পূর্ণসংখ্যা নয়।

$\therefore \sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা অথবা অমূলদ সংখ্যা। যদি $\sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা হয় তবে

ধরি, $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$; যেখানে p ও q পরস্পর সহমৌলিক স্বাভাবিক সংখ্যা এবং $q>1$

বা, $2=\frac{p^2}{q^2}$ [বর্গ করে]

বা, $2q=\frac{p^2}{q}$ [উভয় পক্ষকে q দ্বারা গুণ করে]

স্পষ্টত : $2q$ পূর্ণ সংখ্যা কিন্তু $\frac{p^2}{q}$, পূর্ণসংখ্যা নয়, কারণ p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও এরা পরস্পর সহমৌলিক এবং $q>1$

$\therefore 2q$ এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না, অর্থাৎ $2q \neq \frac{p^2}{q}$

$\therefore \sqrt{2}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোনো সংখ্যা হতে পারে না, অর্থাৎ $\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$

$\therefore \sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

উদাহরণ ২। প্রমাণ কর যে, কোনো চারটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফলের সাথে 1 যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে।

সমাধান : মনে করি, চারটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা যথাক্রমে $x,\ x+1,\ x+2,\ x+3$

ক্রমিক সংখ্যা চারটির গুণফলের সাথে 1 যোগ করলে পাওয়া যায়,

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = x(x+3)(x+1)(x+2)+1$$
$$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$$

$=a(a+2)+1;$ $[x^2+3x=a$ ধরে$]$

$=a(a+2)+1;$

$=a^2+2a+1 \ =(a+1)^2 \ =(x^2+3x+1)^2$; যা একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা।

$\therefore$ যেকোনো চারটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফলের সাথে 1 যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে।

কাজ : প্রমাণ কর যে, $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

দশমিক ভগ্নাংশের শ্রেণিবিন্যাস

প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যাকে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যায়। যেমন : $2=2\cdot 0,\ \frac{2}{5}=0.4,\ \frac{1}{3}=0.333....$ ইত্যাদি। দশমিক ভগ্নাংশ তিন প্রকার: সসীম দশমিক, আবৃত্ত দশমিক এবং অসীম দশমিক ভগ্নাংশ।

সসীম দশমিক ভগ্নাংশ : সসীম দশমিকে দশমিক চিহ্নের ডানদিকে সসীম সংখ্যক অঙ্ক থাকে। যেমন : 0.12, 1.023, 7.832, 54.67, **.......**ইত্যাদি সসীম দশমিক ভগ্নাংশ।

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ : আবৃত্ত দশমিকে দশমিক চিহ্নের ডানদিকের অঙ্কগুলো বা অংশবিশেষ বারবার থাকবে। যেমন, 3.333....., 2.454545......, 5.12765765 ইত্যাদি আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ।

অসীম দশমিক ভগ্নাংশ : অসীম দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক চিহ্নের ডানদিকের অঙ্ক কখনো শেষ হয় না। অসীম দশমিক ভগ্নাংশ দুই প্রকার: অসীম **আবৃত্ত** দশমিক ভগ্নাংশ এবং অসীম অনাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ। যেমন : 1.4142135......, 2.8284271....... ইত্যাদি অসীম অনাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ।

সকল অসীম দশমিক ও আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে মূলদ সংখ্যা এবং অসীম দশমিক ভগ্নাংশ অমূলদ সংখ্যা। কোনো অমূলদ সংখ্যার মান যত দশমিক স্থান পর্যন্ত ইচ্ছা নির্ণয় করা যায়। কোনো ভগ্নাংশের লব ও হরকে স্বাভাবিক সংখ্যায় প্রকাশ করতে পারলে, ঐ ভগ্নাংশটি মূলদ সংখ্যা।

কাজ :

1.723, 5.2333........, 0.0025, 2.1356124......., 0.0105105........ এবং 0.450123....... ভগ্নাংশগুলোকে কারণসহ শ্রেণিবিন্যাস কর।

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ

$\frac{23}{6}$ ভগ্নাংশটিকে দশমিকে প্রকাশ করি।

```
6 ) 23 (3.833
    18
    50
    48
     20
     18
      20
      18
       2
```

লক্ষ করি, ভগ্নাংশের লবকে হর দিয়ে ভাগ করে ভগ্নাংশে পরিণত করার সময় ভাগের প্রক্রিয়া শেষ হবে না। দেখা যায় যে, ভাগফলে একই সংখ্যা 3 বারবার আসে। এখানে 3.8333..... একটি অসীম আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ।

যে সকল দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর ডানে একটি অঙ্ক ক্রমান্বয়ে বারবার বা একাধিক অঙ্ক পর্যায়ক্রমে বারবার আসে, এদের আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ বলা হয়। আবৃত্ত বা পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশে যে অংশ বারবার অর্থাৎ পুনঃপুনঃ আবির্ভূত হয়, একে আবৃত্ত অংশ বলে।

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে একটি অঙ্ক আবৃত্ত হলে, সে অঙ্কের উপর পৌনঃপুনিক বিন্দু এবং একাধিক অঙ্ক আবৃত্ত হলে, কেবলমাত্র প্রথম ও শেষ অঙ্কের উপর পৌনঃপুনিক বিন্দু দেওয়া হয়। যেমন 2.555....... কে লেখা হয় $2.\dot{5}$ দ্বারা এবং 3.124124124........ কে লেখা হয়, $3.\dot{1}2\dot{4}$ দ্বারা।

দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর পর আবৃত্তাংশ ছাড়া অন্য কোনো অঙ্ক না থাকলে, একে বিশুদ্ধ পৌনঃপুনিক বলে এবং পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর পর আবৃত্তাংশ ছাড়া এক বা একাধিক অঙ্ক থাকলে, একে মিশ্র পৌনঃপুনিক বলে। যেমন, $1.\dot{3}$ বিশুদ্ধ পৌনঃপুনিক ভগ্নাংশ এবং $4.235\dot{1}\dot{2}$ মিশ্র পৌনঃপুনিক ভগ্নাংশ।

ভগ্নাংশের হরে 2, 5 ছাড়া অন্য কোনো মৌলিক গুণনীয়ক (উৎপাদক) থাকলে, সেই হর দ্বারা লবকে ভাগ করলে, কখনো নিঃশেষে বিভাজ্য হবে না। যেহেতু পর্যায়ক্রমে ভাগে শেষের অঙ্কগুলো 1, 2, ..., 9 ছাড়া অন্য কিছু হতে পারে না, সেহেতু এক পর্যায়ে ভাগশেষগুলো বারবার একই সংখ্যা হতে থাকবে। আবৃত্তাংশের সংখ্যা সবসময় হরে যে সংখ্যা থাকে, এর চেয়ে ছোট হয়।

উদাহরণ ৩। $\frac{3}{11}$ কে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান :

```
11)  30 ( 0.2727
     22
      80
      77
       30
       22
        80
        77
         3
```

নির্ণেয় দশমিক ভগ্নাংশ = 0.2727 ....= $0.\dot{2}\dot{7}$

উদাহরণ ৪। $\frac{95}{37}$ কে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান :

```
37 ) 95 ( 2.56756
     74
     210
     185
     250
     222
      280
      259
       210
       185
        250
         222
         28
```

নির্ণেয় দশমিক ভগ্নাংশ = 2.56756...... = $2.\dot{5}6\dot{7}$

আবৃত্ত দশমিককে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ ও আবৃত্ত দশমিকের মান নির্ণয় :

উদাহরণ ৫। $0.\dot{3}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমধান : $0.\dot{3} = .3333........\ 0.\dot{3} = 0.3333$

$0.\dot{3}\times 10 = 0.333.......\times 10 = 3.333......$

এবং $0.\dot{3}\times 1 \quad = 0.333.......\times 1 \quad = 0.333......$

বিয়োগ করে, $0.\dot{3}\times 10 - 0.\dot{3}\times 1 \quad = 3$

বা, $0.\dot{3}\times(10-1) = 3$ বা, $0.\dot{3}\times 9 = 3$

অতএব, $0.\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

নির্ণেয় ভগ্নাংশ $\frac{1}{3}$

উদাহরণ ৬। $0.\dot{2}\dot{4}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : $0.\dot{2}\dot{4} = 0.24242424........$

এখন $0.\dot{2}\dot{4}\times 100 = 0.242424.......\times 100 = 24.2424......$

এবং $0.\dot{2}\dot{4}\times 1 \quad = 0.242424.......\times 1 \quad = 0.242424......$

বিয়োগ করে, $0.\dot{2}\dot{4}(100-1) = 24$

বা, $0.\dot{2}\dot{4}\times 99 \quad = 24$ বা, $0.\dot{2}\dot{4} = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$

নির্ণেয় ভগ্নাংশ $\frac{8}{33}$

উদাহরণ ৭। $5.1\dot{3}4\dot{5}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : $5.1\dot{3}4\dot{5} = 5.1345345345.........$

এখন $5.1\dot{3}4\dot{5}\times 10000 = 5.1345345......\times 10000 = 51345.345......$

এবং $5.1\dot{3}4\dot{5}\times 10 \quad = 5.1345345.......\times 10 \quad = 51.345......$

বিয়োগ করে, $5.1\dot{3}4\dot{5}\times 9990 \quad = 51345 - 51$

অতএব, $5.1\dot{3}4\dot{5} = \frac{51345-51}{9990} = \frac{51294}{9990} = \frac{8549}{1665} = 5\frac{224}{1665}$

নির্ণেয় ভগ্নাংশ $5\frac{224}{1665}$

উদাহরণ ৮। $42.34\dot{7}\dot{8}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : $42.34\dot{7}\dot{8} = 42.347878........$

এখন $\quad 42.34\dot{7}\dot{8} \times 10000 = 42.347878.........\times 10000 = 42348.7878$

এবং $\quad 42.34\dot{7}\dot{8} \times 100 = 42.347878........ \times 100 = 4234.7878$

বিয়োগ করে, $42.34\dot{7}\dot{8} \times 9900 = 423478 - 4234$

অতএব, $42.34\dot{7}\dot{8} = \dfrac{423478 - 4234}{9900} = \dfrac{419244}{9900} = \dfrac{34937}{825} = 42\dfrac{287}{825}$

নির্ণেয় ভগ্নাংশ $42\dfrac{287}{825}$

ব্যাখ্যা : উদাহরণ ৫, ৬, ৭ এবং ৮ থেকে দেখা যায় যে,

- আবৃত্ত দশমিকে দশমিক বিন্দুর পর যে কয়টি অঙ্ক আছে, সে কয়টি শূন্য 1 এর ডানে বসিয়ে প্রথমে আবৃত্ত দশমিককে গুণ করা হয়েছে।
- আবৃত্ত দশমিকে দশমিক বিন্দুর পর যে কয়টি অনাবৃত্ত অঙ্ক আছে, সে কয়টি শূন্য 1 এর ডানে বসিয়ে আবৃত্ত দশমিককে গুণ করা হয়েছে।
- প্রথম গুণফল থেকে দ্বিতীয় গুণফল বিয়োগ করা হয়েছে। প্রথম গুণফল থেকে দ্বিতীয় গুণফল বিয়োগ করায় ডানপক্ষে পূর্ণ সংখ্যা পাওয়া গেছে। এখানে লক্ষণীয় যে, আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের দশমিক ও পৌনঃপুনিক বিন্দু উঠিয়ে প্রাপ্ত সংখ্যা থেকে অনাবৃত্ত অংশের সংখ্যা বিয়োগ করা হয়েছে।
- আবৃত্ত দশমিকে যতগুলো আবৃত্ত অঙ্ক ছিল ততগুলো 9 লিখে এবং তাদের ডানে দশমিক বিন্দুর পর যতগুলো অনাবৃত্ত অঙ্ক ছিল ততগুলো শূন্য বসিয়ে উপরে প্রাপ্ত বিয়োগফলকে ভাগ করা হয়েছে।
- আবৃত্ত দশমিককে ভগ্নাংশে পরিণত করায় ভগ্নাংশটির হর হলো যতগুলো আবৃত্ত অঙ্ক ততগুলো 9 এবং 9 গুলোর ডানে দশমিক বিন্দুর পর যতগুলো অনাবৃত্ত অঙ্ক ততগুলো শূন্য। আর লব হলো আবৃত্ত দশমিকের দশমিক বিন্দু ও পৌনঃপুনিক বিন্দু উঠিয়ে যে সংখ্যা পাওয়া গেছে, সে সংখ্যা থেকে আবৃত্তাংশ বাদ দিয়ে বাকি অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যা বিয়োগ করে বিয়োগফল।

মন্তব্য : আবৃত্ত দশমিককে সব সময় সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত করা যায়। সকল আবৃত্ত দশমিক মূলদ সংখ্যা।

উদাহরণ : ৯। $5.23\dot{4}5\dot{7}$

সমাধান : $5.23\dot{4}5\dot{7} = 5.23457457457.........$

এখন $5.23\dot{4}5\dot{7} \times 100000 = 523457.457457$

এবং $5.23\dot{4}5\dot{7} \times 100 = 523.457457$

বিয়োগ করে, $5.23\dot{4}5\dot{7} \times 99900 = 522934$

অতএব, $5.23\dot{4}5\dot{7} = \dfrac{522934}{99900} = \dfrac{261467}{49950}$

নির্ণেয় ভগ্নাংশ $\dfrac{261467}{49950}$

ব্যাখ্যা : দশমিক অংশে পাঁচটি অঙ্ক রয়েছে বলে এখানে আবৃত্ত দশমিককে প্রথমে 100000 (এক এর ডানে পাঁচটি শূন্য) দ্বারা গুণ করা হয়েছে। আবৃত্ত অংশের বামে দশমিক অংশে দুইটি অঙ্ক রয়েছে বলে আবৃত্ত দশমিককে 100 (এক এর ডানে দুইটি শূন্য) দ্বারা গুণ করা হয়েছে। প্রথম গুণফল থেকে দ্বিতীয় গুণফল বিয়োগ করা হয়েছে। এই বিয়োগফলের একদিকে পূর্ণসংখ্যা অন্যদিকে প্রদত্ত আবৃত্ত দশমিকের মানের $(100000 - 100) = 99900$ গুণ। উভয় পক্ষকে 99900 দিয়ে ভাগ করে নির্ণেয় ভগ্নাংশ পাওয়া গেল।

> **কাজ :**
>
> $0.\dot{4}\dot{1}$ এবং $3.04\dot{6}2\dot{3}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর কর।

আবৃত্ত দশমিককে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তরের নিয়ম

নির্ণেয় ভগ্নাংশের লব = প্রদত্ত দশমিক ভগ্নাংশের দশমিক বিন্দু বাদ দিয়ে প্রাপ্ত পূর্ণ সংখ্যা এবং অনাবৃত্ত অংশ দ্বারা গঠিত পূর্ণ সংখ্যার বিয়োগফল।

নির্ণেয় ভগ্নাংশের হর = দশমিক বিন্দুর পরে আবৃত্ত অংশে যতগুলো অঙ্ক আছে ততগুলো নয় (9) এবং অনাবৃত্ত অংশে যতগুলো অঙ্ক আছে ততগুলো শূন্য (0) দ্বারা গঠিত পূর্ণ সংখ্যা।

এখানে, এ নিয়ম সরাসরি প্রয়োগ করে কয়েকটি আবৃত্ত দশমিকে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত করা হলো।

উদাহরণ ১০। $45.2\dot{3}4\dot{6}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : $45.2\dot{3}4\dot{6} = \dfrac{452346-452}{9990} = \dfrac{451894}{9990} = \dfrac{225947}{4995} = 45\dfrac{1172}{4995}$

নির্ণেয় ভগ্নাংশ $45\dfrac{1172}{4995}$

উদাহরণ ১১। $32.\dot{5}6\dot{7}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : $32.\dot{5}6\dot{7} = \dfrac{32567-32}{999} = \dfrac{32535}{999} = \dfrac{3615}{111} = \dfrac{1205}{37} = 32\dfrac{21}{37}$

নির্ণেয় ভগ্নাংশ $32\dfrac{21}{37}$.

> **কাজ :**
>
> $0.0\dot{1}\dot{2}$ এবং $3.31\dot{2}\dot{4}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর কর।

সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ও অসদৃশ আবৃত্ত দশমিক

দুই বা ততোধিক আবৃত্ত দশমিকের অনাবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা সমান হলে এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যাও সমান হলে, তাদের সদৃশ আবৃত্ত দশমিক বলে। অন্যথায় তাদেরকে অসদৃশ আবৃত্ত দশমিক বলে। যেমন: $12.\dot{4}\dot{5}$ ও $6.\dot{3}\dot{2}$; $9.45\dot{3}$ ও $125.89\dot{7}$ সদৃশ আবৃত্ত দশমিক। আবার, $0.3\dot{4}5\dot{6}$ ও $7.45\dot{7}8\dot{9}$; $6.43\dot{5}\dot{7}$ ও $2.89\dot{3}4\dot{5}$ অসদৃশ আবৃত্ত দশমিক।

অসদৃশ আবৃত্ত দশমিকগুলোকে সদৃশ আবৃত্ত দশমিকে পরিবর্তনের নিয়ম

কোনো আবৃত্ত দশমিকের আবৃত্ত অংশের অঙ্কগুলোকে বারবার লিখলে দশমিকের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। যেমন, $6.45\dot{3}\dot{7} = 6.45\dot{3}73\dot{7} = 6.453\dot{7}\dot{3} = 6.4537\dot{3}\dot{7}$। এখানে প্রত্যেকটি আবৃত্ত দশমিক 6.45373737……… একটি অসীম দশমিক। প্রত্যেকটি আবৃত্ত দশমিককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তন করলে দেখা যাবে প্রত্যেকটি সমান।

$$6.45\dot{3}\dot{7} = \frac{64537 - 645}{9900} = \frac{63892}{9900}$$

$$6.45\dot{3}73\dot{7} = \frac{6453737 - 645}{999900} = \frac{6453092}{999900} = \frac{63892}{9900}$$

$$6.4537\dot{3}\dot{7} = \frac{6453737 - 64537}{990000} = \frac{6389200}{990000} = \frac{63892}{9900}$$

সদৃশ আবৃত্ত দশমিকে পরিণত করতে হলে সংখ্যাগুলোর মধ্যে যে সংখ্যাটির অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা বেশি, প্রত্যেকটি অনাবৃত্ত অংশ তত অঙ্কের করতে হবে এবং বিভিন্ন সংখ্যায় আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যাগুলোর ল.সা.গু যত, প্রত্যেকটি দশমিকের আবৃত্ত অংশ তত অঙ্কের করতে হবে।

উদাহরণ ১২। $5.\dot{6}$, $7.3\dot{4}\dot{5}$ ও $10.78\dot{4}2\dot{3}$ কে সদৃশ আবৃত্ত দশমিকে পরিণত কর।

সমাধান : $5.\dot{6}, 7.3\dot{4}\dot{5}$ ও $10.78\dot{4}2\dot{3}$ আবৃত্ত দশমিকে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা যথাক্রমে $0, 1$ ও 2। এখানে অনাবৃত্ত অঙ্ক সংখ্যা $10.78\dot{4}2\dot{3}$ দশমিকে সবচেয়ে বেশি এবং এ সংখ্যা 2। তাই সদৃশ আবৃত্ত দশমিক করতে হলে প্রত্যেকটি দশমিকের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2 হবে। $5.\dot{6}$, $7.3\dot{4}\dot{5}$ ও $10.78\dot{4}2\dot{3}$ আবৃত্ত দশমিকে আবৃত্ত অংশের সংখ্যা যথাক্রমে $1, 2$ ও 3। $1, 2$ ও 3 এর ল.সা.গু হলো 6। তাই সদৃশ আবৃত্ত দশমিক করতে হলে প্রত্যেকটি দশমিকের আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 6 হবে।

সুতরাং $5.\dot{6} = 5.66\dot{6}666666\dot{6}$, $7.3\dot{4}\dot{5} = 7.34\dot{5}4545\dot{4}$ ও $10.78\dot{4}2\dot{3} = 10.78\dot{4}2342\dot{3}$

নির্ণেয় সদৃশ আবৃত্ত দশমিকসমূহ যথাক্রমে $5.66\dot{6}6666\dot{6}, 7.34\dot{5}4545\dot{4}, 10.78\dot{4}2342\dot{3}$

উদাহরণ ১৩। $1.7643,\ 3.\dot{2}\dot{4}$ ও $2.78\dot{3}4\dot{6}$ কে সদৃশ আবৃত্ত দশমিকে পরিবর্তন কর।

সমাধান : 1.7643 এ অনাবৃত্ত অংশ বলতে দশমিক বিন্দুর পরের 4 টি অঙ্ক, এখানে আবৃত্ত অংশ নেই। $3.\dot{2}\dot{4}$ এ অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 0 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2 , $2.78\dot{3}4\dot{6}$ এ অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2 এবং আবৃত্ত অংশের সংখ্যা 3 । এখানে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা সবচেয়ে বেশি হলো 4 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2 ও 3 এর ল.সা.গু হলো 6 । প্রত্যেকটি সদৃশ দশমিকের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 4 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 6 ।

$\therefore 1.7643 = 1.7643\dot{0}00000\dot{0}$, $3.\dot{2}\dot{4} = 3.2424\dot{2}42424\dot{4}$ ও $2.78\dot{3}4\dot{6} = 2.7834\dot{6}34634\dot{4}$

নির্ণেয় সদৃশ আবৃত্ত দশমিকসমূহ: $1.7643\dot{0}00000\dot{0}$, $3.2424\dot{2}49424\dot{4}$, $2.7834\dot{6}34634\dot{4}$

মন্তব্য : সসীম দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ দশমিকে পরিণত করার জন্য দশমিক বিন্দুর সর্বডানের অঙ্কের পর প্রয়োজনীয় সংখ্যক শূন্য বসিয়ে প্রত্যেকটি দশমিকের দশমিক বিন্দুর পরের অনাবৃত্ত অঙ্ক সংখ্যা সমান করা হয়েছে। আর আবৃত্ত দশমিকে প্রত্যেকটি দশমিকের দশমিক বিন্দুর পরের অনাবৃত্ত অঙ্ক সংখ্যা সমান এবং আবৃত্ত অঙ্ক সংখ্যা সমান করা হয়েছে আবৃত্ত অঙ্কগুলো ব্যবহার করে। অনাবৃত্ত অংশের পর যেকোনো অঙ্ক থেকে শুরু করে আবৃত্ত অংশ নেওয়া যায়।

কাজ :

$3.467,\ 2.01\dot{2}\dot{4}\dot{3}$ এবং $7.52\dot{5}\dot{6}$ কে সদৃশ আবৃত্ত দশমিকে পরিবর্তন কর।

আবৃত্ত দশমিকের যোগ ও বিয়োগ

আবৃত্ত দশমিকের যোগ বা বিয়োগ করতে হলে আবৃত্ত দশমিকগুলোকে সদৃশ আবৃত্ত দশমিকে পরিবর্তন করতে হবে। এরপর সসীম দশমিকের নিয়মে যোগ বা বিয়োগ করতে হবে। সসীম দশমিক ও আবৃত্ত দশমিকগুলোর মধ্যে যোগ বা বিয়োগ করতে হলে আবৃত্ত দশমিকগুলোকে সদৃশ করার সময় প্রত্যেকটি আবৃত্ত দশমিকের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে সসীম দশমিকের দশমিক বিন্দুর পরের অঙ্ক সংখ্যা ও অন্যান্য আবৃত্ত দশমিকের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যার মধ্যে সবচেয়ে বড় যে সংখ্যা সে সংখ্যার সমান। আর আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে যথানিয়মে প্রাপ্ত ল.সা.গু এর সমান এবং সসীম দশমিকের ক্ষেত্রে আবৃত্ত অংশের জন্য প্রয়োজনীয় সংখ্যক শূন্য বসাতে হবে। এরপর যোগ বা বিয়োগ সসীম দশমিকের নিয়মে করতে হবে। এভাবে প্রাপ্ত যোগফল বা বিয়োগফল প্রকৃত যোগফল বা বিয়োগফল হবে না। প্রকৃত যোগফল বা বিয়োগফল বের করতে হলে দেখতে হবে যে সদৃশ দশমিকগুলো যোগ বা বিয়োগ করলে সদৃশ দশমিকগুলোর আবৃত্ত অংশের সর্ববামের অঙ্কগুলোর যোগ বা বিয়োগে হাতে যে সংখ্যাটি থাকে, তা প্রাপ্ত যোগফল বা বিয়োগফলের আবৃত্ত অংশের সর্বডানের অঙ্কের সাথে যোগ বা অঙ্ক থেকে বিয়োগ করলে প্রকৃত যোগফল বা বিয়োগফল পাওয়া যাবে। এটিই নির্ণেয় যোগফল বা বিয়োগফল হবে।

মন্তব্য : (ক) আবৃত্ত দশমিকবিশিষ্ট সংখ্যার যোগফল বা বিয়োগফলও আবৃত্ত দশমিক হয়। এই যোগফল বা বিয়োগফলে অনাবৃত্ত অংশ আবৃত্ত দশমিকগুলোর মধ্যে সর্বাপেক্ষা অনাবৃত্ত অংশবিশিষ্ট আবৃত্ত দশমিকটির অনাবৃত্ত অঙ্ক সংখ্যার সমান হবে এবং আবৃত্ত অংশ আবৃত্ত দশমিক সংখ্যাগুলোর আবৃত্ত অঙ্ক সংখ্যার ল.সা.গু এর সমান সংখ্যক আবৃত্ত অঙ্ক হবে। সসীম দশমিক থাকলে প্রত্যেকটি আবৃত্ত দশমিকের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে সসীম দশমিকের দশমিক বিন্দুর পরের অঙ্ক সংখ্যা ও অন্যান্য আবৃত্ত দশমিকের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যার মধ্যে সবচেয়ে বড় যে সংখ্যা যে সংখ্যার সমান।

(খ) আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিবর্তন করে ভগ্নাংশের নিয়মে যোগফল বা বিয়োগফল বের করার পর যোগফল বা বিয়োগফলকে আবার দশমিকে পরিবর্তন করেও যোগ বা বিয়োগ করা যায়। তবে এ পদ্ধতিতে যোগ বা বিয়োগ করলে বেশি সময় লাগবে।

উদাহরণ ১৪। $3\cdot\dot{8}\dot{9}$, $2\cdot1\dot{7}\dot{8}$ ও $5\cdot89\dot{7}9\dot{8}$ যোগ কর।

সমাধান : এখানে সদৃশ দশমিকগুলোর অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 2, 2 ও 3 এর ল.সা.গু 6। প্রথমে তিনটি আবৃত্ত দশমিককে সদৃশ করা হয়েছে।

$$\begin{array}{lcr}
3.\dot{8}\dot{9} & = & 3\cdot89\dot{8}9898\dot{9} \\
2\cdot1\dot{7}\dot{8} & = & 2.17\dot{8}7878\dot{7} \\
5\cdot89\dot{7}9\dot{8} & = & 5.89\dot{7}98798\dot{8} \\
\hline
 & & 11\cdot97576574 \\
 & & +2 \\
\hline
 & & 11\cdot97\dot{5}7657\dot{6}
\end{array}$$

[$8+8+7+2=25$, এখানে 2 হলো হাতের 2। 25 এর 2 যোগ হয়েছে।]

নির্ণেয় যোগফল $11\cdot97\dot{5}7657\dot{6}$ বা $11\cdot97\dot{5}7\dot{6}$

মন্তব্য : এই যোগফলে 576576 আবৃত্ত অংশ। কিন্তু 576কে আবৃত্ত অংশ করলে মানের কোনো পরিবর্তন হয় না।

দ্রষ্টব্য : সর্বডানে 2 যোগের যৌক্তিকতা বুঝাবার জন্য এ যোগটি আরো বিস্তারিতভাবে দেখানো হলো:

$$\begin{array}{lcl}
3.\dot{8}\dot{9} & = & 3\cdot89\dot{8}9898\dot{9}\,|\,89 \\
2.1\dot{7}\dot{8} & = & 2.17\dot{8}7878\dot{7}\,|\,87 \\
5\cdot89\dot{7}9\dot{8} & = & 5\cdot89\dot{7}98798\dot{8}\,|\,79 \\
\hline
 & & 11.97\dot{5}7657\dot{6}\,|\,55
\end{array}$$

এখানে আবৃত্ত অংশ শেষ হওয়ার পর আরও দুইটি অঙ্ক পর্যন্ত আবৃত্ত অংশকে বাড়ানো হয়েছে। অতিরিক্ত অঙ্কগুলোকে একটা খাড়া রেখা দ্বারা আলাদা করে দেওয়া হয়েছে। এরপর যোগ করা হয়েছে। খাড়া রেখার ডানের দশক স্থানীয় অঙ্কের যোগফল থেকে হাতের 2 এসে খাড়া রেখার বামের প্রথম অঙ্কের সাথে যোগ হয়েছে। খাড়া রেখার ডানের অঙ্কটি আর পৌনঃপুনিক বিন্দু শুরু হওয়ার অঙ্কটি একই।

উদাহরণ ১৫। $8\cdot9\dot{4}7\dot{8}$, $2\cdot346$ ও $4\cdot\dot{7}\dot{1}$ যোগ কর।

সমাধান : দশমিকগুলোকে সদৃশ করতে হলে অনাবৃত্ত অংশ 3 অঙ্কের এবং আবৃত্ত অংশ হবে 3 ও 2 এর ল.সা.গু 6 অঙ্কের।

$$\begin{array}{llr}
8\cdot9\dot{4}7\dot{8} & = & 8\cdot947\dot{8}4784\dot{7} \\
2\cdot346 & & 2\cdot346\dot{0}0000\dot{0} \\
4\cdot\dot{7}\dot{1} & = & 4\cdot717\dot{1}7171\dot{7} \\
\hline
 & & 16\cdot011019564 \\
 & & +1 \\
\hline
 & & 16\cdot011\dot{0}1956\dot{5}
\end{array}$$

[$8+0+1+1=10$, এখানে দ্বিতীয় 1 হলো হাতের 1। 10 এর 1 যোগ হয়েছে।]

নির্ণেয় যোগফল $16\cdot011\dot{0}1956\dot{5}$

কাজ : যোগ কর : ১। $2\cdot0\dot{9}\dot{7}$ ও $5\cdot12\dot{7}6\dot{8}$ ২। $1\cdot34\dot{5}$, $0\cdot31\dot{5}7\dot{6}$ ও $8\cdot056\dot{7}\dot{8}$

উদাহরণ ১৬। $8\cdot2\dot{4}\dot{3}$ থেকে $5\cdot24\dot{6}7\dot{3}$ বিয়োগ কর।

সমাধান : এখানে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 ও 3 এর ল.সা.গু 6 । এখন দশমিক সংখ্যা দুইটিকে সদৃশ করে বিয়োগ করা হলো।

$$\begin{array}{llr}
8\cdot2\dot{4}\dot{3} & = & 8\cdot24\dot{3}4343\dot{4} \\
5\cdot24\dot{6}7\dot{3} & = & 5\cdot24\dot{6}7367\dot{3} \\
\hline
 & & 2\cdot99669761 \\
 & & -1 \\
\hline
 & & 2\cdot99\dot{6}69760
\end{array}$$

[3 থেকে 6 বিয়োগ করলে হাতে 1 নিতে হবে।]

নির্ণেয় বিয়োগফল $2\cdot99\dot{6}69760$ ।

মন্তব্য : পৌনঃপুনিক বিন্দু যেখানে শুরু সেখানে বিয়োজন সংখ্যা বিয়োজ্য সংখ্যা থেকে ছোট হলে সব সময় সর্বডানের অঙ্ক থেকে 1 বিয়োগ করতে হবে।

দ্রষ্টব্য : সর্বডানের অঙ্ক থেকে 1 কেন বিয়োগ করা হয় তা বুঝাবার জন্য নিচে আরো বিস্তারিতভাবে দেখানো হলো:

$$\begin{array}{llr}
8\cdot2\dot{4}\dot{3} & = & 8\cdot24\dot{3}4343\dot{4}\,|\,34 \\
5\cdot24\dot{6}7\dot{3} & = & 5\cdot24\dot{6}7367\dot{3}\,|\,67 \\
\hline
 & & 2\cdot99\dot{6}6976\dot{0}\,|\,67
\end{array}$$

নির্ণেয় বিয়োগফল $2\cdot99\dot{6}6976\dot{0}\,|\,67$

উদাহরণ ১৭। $24\cdot45\dot{6}4\dot{5}$ থেকে $16\cdot\dot{4}3\dot{7}$ বিয়োগ কর।

সমাধান :

$$\begin{array}{llr}
24\cdot45\dot{6}4\dot{5} & = & 24\cdot45\dot{6}4\dot{5} \\
16\cdot\dot{4}3\dot{7} & = & 16\cdot43\dot{7}4\dot{3} \\
\hline
 & & 8\cdot01902 \\
 & & -1 \\
\hline
 & & 8\cdot01\dot{9}0\dot{1}
\end{array}$$

[6 থেকে 7 বিয়োগ করলে হাতে 1 নিতে হবে।]

নির্ণেয় বিয়োগফল $8.01\dot{9}0\dot{1}$

দ্রষ্টব্য :

$$
\begin{array}{lr}
24\cdot45\dot{6}4\dot{5} & = 24\cdot45\dot{6}45\dot{6}|64 \\
16\cdot\dot{4}3\dot{7} & = 16\cdot43\dot{7}4\dot{3}|74 \\
\hline
 & 8\cdot01\dot{9}0\dot{1}|90
\end{array}
$$

> **কাজ :**
>
> **বিয়োগ কর :**
>
> ১। $13\cdot12\dot{7}8\dot{4}$ থেকে $10\cdot418$ ২। $23\cdot03\dot{9}\dot{4}$ থেকে $9\cdot12\dot{6}4\dot{5}$

আবৃত্ত দশমিকের গুণ ও ভাগ

আবৃত্ত দশমিকগুলোকে ভগ্নাংশে পরিণত করে গুণ বা ভাগের কাজ সমাধা করে প্রাপ্ত ভগ্নাংশটিকে দশমিকে প্রকাশ করলেই আবৃত্ত দশমিকগুলোর গুণফল বা ভাগফল হবে। সসীম দশমিক ও আবৃত্ত দশমিকের মধ্যে গুণ বা ভাগ করতে হলে এ নিয়মেই করতে হবে। তবে ভাগের ক্ষেত্রে ভাজ্য ও ভাজক দুইটিই আবৃত্ত দশমিক হলে, উভয়কে সদৃশ আবৃত্ত দশমিক করে নিলে ভাগের কাজ সহজ হয়।

উদাহরণ ১৮। $4\cdot\dot{3}$ কে $5\cdot\dot{7}$ দ্বারা গুণ কর।

সমাধান : $4\cdot\dot{3} = \frac{43-4}{9} = \frac{39}{9} = \frac{13}{3}$

$$5\cdot\dot{7} = \frac{57-5}{9} = \frac{52}{9}$$

$$\therefore\ 4\cdot\dot{3} \times 5\cdot\dot{7} = \frac{13}{3} \times \frac{52}{9} = \frac{676}{27} = 25\cdot\dot{0}3\dot{7}$$

নির্ণেয় গুণফল $25\cdot\dot{0}3\dot{7}$

উদাহরণ ১৯। $0\cdot2\dot{8}$ কে $42\cdot\dot{1}\dot{8}$ দ্বারা গুণ কর।

সমাধান : $0\cdot2\dot{8} = \frac{28-2}{90} = \frac{26}{90} = \frac{13}{45}$

$$42\cdot\dot{1}\dot{8} = \frac{4218-42}{99} = \frac{4176}{99} = \frac{464}{11}$$

সুতরাং $0\cdot2\dot{8} \times 42\cdot\dot{1}\dot{8} = \frac{13}{45} \times \frac{464}{11} = \frac{6032}{495} = 12\cdot1\dot{8}\dot{5}$

নির্ণেয় গুণফল $12\cdot1\dot{8}\dot{5}$

উদাহরণ ২০। $2\cdot5 \times 4\cdot3\dot{5} \times 1\cdot2\dot{3}\dot{4} =$ কত ?

সমাধান : $2\cdot5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$

$$4\cdot3\dot{5}=\frac{435-43}{90}=\frac{392}{90}$$

$$1\cdot2\dot{3}\dot{4}=\frac{1234-12}{990}=\frac{1222}{990}=\frac{611}{495}$$

$$\therefore\ 2\cdot5\times4\cdot3\dot{5}\times1\cdot2\dot{3}\dot{4}=\frac{5}{2}\times\frac{392}{90}\times\frac{611}{495}=\frac{196\times611}{8910}=\frac{119756}{8910}=13.440628...$$

নির্ণেয় গুণফল $13\cdot44062$ (প্রায়)

> **কাজ :**
>
> ১। $1\cdot1\dot{3}$ কে $2\cdot6$ দ্বারা গুণ কর। ২। $0\cdot\dot{2}\times1\cdot\dot{1}\dot{2}\times0\cdot0\dot{8}\dot{1}=$ কত ?

উদাহরণ ২১। $7\cdot\dot{3}\dot{2}$ কে $0\cdot2\dot{7}$ দ্বারা ভাগ কর।

সমাধান : $7\cdot\dot{3}\dot{2}=\frac{732-7}{99}=\frac{725}{99}$

$$0\cdot2\dot{7}=\frac{27-2}{90}=\frac{25}{90}=\frac{5}{18}$$

$$\therefore\ 7\cdot\dot{3}\dot{2}\div0\cdot2\dot{7}=\frac{725}{99}\div\frac{5}{18}=\frac{725}{99}\times\frac{18}{5}=\frac{290}{11}=26.\dot{3}\dot{6}$$

নির্ণেয় ভাগফল $26\cdot\dot{3}\dot{6}$

উদাহরণ ২২। $2\cdot\dot{2}71\dot{8}$ কে $1\cdot9\dot{1}\dot{2}$ দ্বারা ভাগ কর।

সমাধান : $2\cdot\dot{2}71\dot{8}=\frac{22718-2}{9999}=\frac{22716}{9999}$

$$1\cdot9\dot{1}\dot{2}=\frac{1912-19}{990}=\frac{1893}{990}$$

$$\therefore 2\cdot\dot{2}71\dot{8}\div1\cdot9\dot{1}\dot{2}=\frac{22716}{9999}\div\frac{1893}{990}=\frac{22716}{9999}\times\frac{990}{1893}=\frac{120}{101}=1\cdot\dot{1}88\dot{1}$$

নির্ণেয় ভাগফল $1\cdot\dot{1}88\dot{1}$

উদাহরণ ২৩। $9\cdot45$ কে $2\cdot8\dot{6}\dot{3}$ দ্বারা ভাগ কর।

সমাধান : $9\cdot45\div2\cdot8\dot{6}\dot{3}=\frac{945}{100}\div\frac{2863-28}{990}=\frac{945}{100}\times\frac{990}{2835}$

$$=\frac{189\times99}{2\times2835}=\frac{33}{10}=3\cdot3$$

নির্ণেয় ভাগফল $3\cdot3$

মন্তব্য : আবৃত্ত দশমিকের গুণফল এবং ভাগফল আবৃত্ত দশমিক হতেও পারে, নাও হতে পারে।

> **কাজ :**
>
> ১। $0\cdot\dot{6}$ কে $0\cdot\dot{9}$ দ্বারা ভাগ কর। ২। $0\cdot7\dot{3}\dot{2}$ কে $0\cdot02\dot{7}$ দ্বারা ভাগ কর।

অসীম দশমিক

অনেক দশমিক ভগ্নাংশ আছে যাদের দশমিক বিন্দুর ডানের অঙ্কের শেষ নেই, আবার এক বা একাধিক অঙ্ক বারবার পর্যায়ক্রমে আসে না, এসব দশমিক ভগ্নাংশ অসীম দশমিক ভগ্নাংশ। যেমন, $5\cdot134248513942307.........$ একটি অসীম দশমিক সংখ্যা। 2 এর বর্গমূল একটি অসীম দশমিক। এখন, 2 এ বর্গমূল বের করি।

1	2	1·4142135........
	1	
24	100	
	96	
281	400	
	281	
2824	11900	
	11296	
28282	60400	
	56564	
282841	383600	
	282841	
2828423	10075900	
	8485269	
28284265	159063100	
	141421325	
	17641775	

এভাবে প্রক্রিয়া অনন্তকাল পর্যন্ত চললেও শেষ হবে না।

$\therefore\ \sqrt{2}=1\cdot4142135......$ একটি অসীম দশমিক সংখ্যা।

নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত মান এবং নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান

অসীম দশমিকের মান কোনো নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত মান বের করা এবং কোনো নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান বের করা একই কথা নয়।

যেমন, $5\cdot4325893......$ দশমিকটির "চার দশমিক স্থান পর্যন্ত মান" হবে $5\cdot4325$, কিন্তু $5\cdot4325893....$ দশমিকটির "চার দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান" হবে $5\cdot4326$। এখানে "দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান" এবং "দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান" একই যা $5\cdot43$। সসীম দশমিকেরও এভাবে আসন্ন মান বের করা যায়।

মন্তব্য : যত দশমিক স্থান পর্যন্ত মান বের করতে বলা হবে, তত দশমিক স্থান পর্যন্ত যে সব সংখ্যা থাকবে হুবহু সে সংখ্যাগুলো লিখতে হবে মাত্র। আর যত দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান বের করতে বলা হবে, এর পরবর্তী স্থানটিতে $5, 6, 7, 8$ বা 9 হয়, তবে শেষ স্থানটির সংখ্যার সাথে 1 যোগ করতে হবে। কিন্তু যদি 1, 2, 3 বা 4 হয়, তবে শেষ স্থানটির সংখ্যা যেমন ছিল তেমনই থাকবে, এক্ষেত্রে "দশমিক স্থান পর্যন্ত মান" এবং "দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান" একই। যত দশমিক স্থান পর্যন্ত বের করতে বলা হবে, দশমিকের পর এর চেয়েও 1 স্থান বেশি পর্যন্ত দশমিক সংখ্যা বের করতে হবে।

উদাহরণ ২৪। 13 এর বর্গমূল বের কর এবং তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান লেখ।

সমাধান : 3) 13 (3·605551........

```
     9
   ------------
66 | 400
   | 396
   ------------
7205 | 40000
     | 36025
     ------------
72105 | 3697500
      | 3605525
      ------------
7211101 | 9197500
        | 7211101
        ------------
          1986399
```

∴ নির্ণেয় বর্গমূল 3·605551........

∴ নির্ণেয় তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 3·606

উদাহরণ ২৫। 4·4623845....... দশমিকটির 1, 2, 3, 4 ও 5 দশমিক স্থান পর্যন্ত মান ও আসন্ন মান বের কর।

সমাধান : 4·4623845 সংখ্যাটির এক দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 4·4 ,

এক দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 4·5 ।

দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 4·46 ,

দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 4·46 ।

তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 4·462 ,

তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 4·462 ।

চার দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 4·4623 ,

চার দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 4·4624 ।

পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 4·46238 ,

পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 4·46238 ।

কাজ : 29 এর বর্গমূল নির্ণয় কর এবং বর্গমূলকে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান লেখ।

অনুশীলনী ১

১। প্রমাণ কর যে, (ক) $\sqrt{5}$ (খ) $\sqrt{7}$ (গ) $\sqrt{10}$ প্রত্যেক অমূলদ সংখ্যা।

২। (ক) 0.31 এবং 0.12 এর মধ্যে দুইটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

(খ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sqrt{2}$ এর মধ্যে একটি মূলদ এবং একটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

৩। (ক) প্রমাণ কর যে, যেকোনো বিজোড় পূর্ণ সংখ্যার বর্গ একটি বিজোড় সংখ্যা।
(খ) প্রমাণ কর যে, দুইটি ক্রমিক জোড় সংখ্যার গুণফল 8 (আট) দ্বারা বিভাজ্য।

৪। আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর : (ক) $\frac{1}{6}$ (খ) $\frac{7}{11}$ (গ) $3\frac{2}{9}$ (ঘ) $3\frac{8}{15}$

৫। সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর : (ক) $0\cdot\dot{2}$ (খ) $0\cdot\dot{3}\dot{5}$ (গ) $0\cdot1\dot{3}$ (ঘ) $3\cdot7\dot{8}$ (ঙ) $6\cdot2\dot{3}0\dot{9}$

৬। সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর :

(ক) $2\cdot\dot{3}$, $5\cdot2\dot{3}\dot{5}$ (খ) $7\cdot2\dot{6}$, $4\cdot23\dot{7}$ (গ) $5\cdot\dot{7}$, $8\cdot\dot{3}\dot{4}$, $6\cdot\dot{2}4\dot{5}$ (ঘ) $12\cdot32$, $2\cdot1\dot{9}$, $4\cdot32\dot{5}\dot{6}$

৭। যোগ কর : (ক) $0\cdot4\dot{5}+0\cdot13\dot{4}$ (খ) $2\cdot0\dot{5}+8\cdot0\dot{4}+7\cdot018$ (গ) $0\cdot00\dot{6}+0\cdot\dot{9}\dot{2}+0\cdot0\dot{1}3\dot{4}$

৮। বিয়োগ কর :

(ক) $3\cdot\dot{4}-2\cdot1\dot{3}$ (খ) $5\cdot\dot{1}\dot{2}-3\cdot4\dot{5}$ (গ) $8\cdot49-5\cdot3\dot{5}\dot{6}$ (ঘ) $19\cdot34\dot{5}-13\cdot2\dot{3}4\dot{9}$

৯। গুণ কর : (ক) $0\cdot\dot{3}\times0\cdot\dot{6}$ (খ) $2\cdot\dot{4}\times0\cdot\dot{8}\dot{1}$ (গ) $0\cdot6\dot{2}\times0\cdot\dot{3}$ (ঘ) $42\cdot\dot{1}\dot{8}\times0\cdot2\dot{8}$

১০। ভাগ কর : (ক) $0\cdot\dot{3}\div0\cdot\dot{6}$ (খ) $0\cdot3\dot{5}\div1\cdot\dot{7}$ (গ) $2\cdot3\dot{7}\div0\cdot4\dot{5}$ (ঘ) $1\cdot\dot{1}8\dot{5}\div0\cdot\dot{2}\dot{4}$

১১। বর্গমূল নির্ণয় কর (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত) এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূলগুলোর আসন্ন মান লেখ :

(ক) 12 (খ) $0\cdot\dot{2}\dot{5}$ (গ) $1\cdot3\dot{4}$ (ঘ) $5\cdot1\dot{3}0\dot{2}$

১২। নিচের কোন সংখ্যাগুলো মূলদ এবং কোন সংখ্যাগুলো অমূলদ লেখ :

(ক) $0\cdot\dot{4}$ (খ) $\sqrt{9}$ (গ) $\sqrt{11}$ (ঘ) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (ঙ) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}$ (চ) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}}$ (ছ) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{7}}$ (জ) $5\cdot\dot{6}3\dot{9}$

১৩। সরল কর :

(ক) $(0\cdot\dot{3}\times0\cdot8\dot{3})\div(0\cdot5\times0\cdot\dot{1})+0\cdot3\dot{5}\div0\cdot0\dot{8}$

(খ) $[(6.27\times0.5)\div\{(0.5\times0.75)\times8.36\}]\div\{(0.25\times0.1)\times(0.75\times21.\dot{3})\times0.5\}$

১৪। $\sqrt{5}$ ও 4 দুইটি বাস্তব সংখ্যা।

ক. কোনটি মূলদ ও কোনটি অমূলদ নির্দেশ কর।

খ. $\sqrt{5}$ ও 4 এদের মধ্যে দুইটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

গ. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

দ্বিতীয় অধ্যায়

সেট ও ফাংশন

(Sets and Functions)

সেট শব্দটি আমাদের সুপরিচিত যেমন : ডিনার সেট, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, মূলদ সংখ্যার সেট ইত্যাদি। আধুনিক হাতিয়ার হিসেবে সেটের ব্যবহার ব্যাপক। জার্মান গণিতবিদ জর্জ ক্যান্টর (১৮৪৪–১৯১৮) অসীম সমতুল সেটের ধারণা প্রদান করে গণিত শাস্ত্রে আলোড়ন সৃষ্টি করেন। এই অধ্যায়ে সেটের ধারণা ব্যবহার করে গাণিতিক যুক্তি ও চিত্রের মাধ্যমে সমস্যা সমাধান এবং ফাংশন সম্পর্কে সম্যক ধারণা দেওয়া হবে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- ➢ সেট ও উপসেটের ধারণা ব্যাখ্যা করে প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করতে পারবে।
- ➢ সেট প্রকাশের পদ্ধতি বর্ণনা করতে পারবে।
- ➢ অসীম সেট ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং সসীম ও অসীম সেটের পার্থক্য নিরূপণ করতে পারবে।
- ➢ সেটের সংযোগ ও ছেদ ব্যাখ্যা এবং যাচাই করতে পারবে।
- ➢ শক্তি সেট ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং দুই ও তিন সদস্যবিশিষ্ট সেটের শক্তি সেট গঠন করতে পারবে।
- ➢ ক্রমজোড় ও কার্টেসীয় গুণজ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ➢ উদাহরণ ও ভেনচিত্রের সাহায্যে সেট প্রক্রিয়ার সহজ বিধিগুলো প্রমাণ করতে পারবে এবং বিধিগুলো প্রয়োগ করে বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- ➢ অন্বয় ও ফাংশন ব্যাখ্যা করতে ও গঠন করতে পারবে।
- ➢ ডোমেন ও রেঞ্জ কী ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ➢ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে পারবে।
- ➢ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবে।

সেট *(Set)*

বাস্তব বা চিন্তা জগতের সু–সংজ্ঞায়িত বস্তুর সমাবেশ বা সংগ্রহকে সেট বলে। যেমন, বাংলা, ইংরেজি ও গণিত বিষয়ে তিনটি পাঠ্যবইয়ের সেট। প্রথম দশটি বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, পূর্ণসংখ্যার সেট, বাস্তব সংখ্যার সেট ইত্যাদি। সেটকে সাধারণত ইংরেজি বর্ণমালার বড় হাতের অক্ষর $A, B, C, ...X, Y, Z$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন, $2, 4, 6$ সংখ্যা তিনটির সেট $A = \{2, 4, 6\}$

সেটের প্রত্যেক বস্তু বা সদস্যকে সেটের উপাদান $(element)$ বলা হয়। যেমন, $B = \{a, b\}$ হলে, B সেটের উপাদান a এবং b; উপাদান প্রকাশের চিহ্ন '$\in$' .

$\therefore$ $a \in B$ এবং পড়া হয় a, B এর সদস্য $(a$ *belongs to* $B)$

$b \in B$ এবং পড়া হয় b, B এর সদস্য $(b$ *belongs to* $B)$

উপরের B সেটে c উপাদান নেই।

$\therefore$ $c \notin B$ এবং পড়া হয় c, B এর সদস্য নয় $(c$ *does not belong to* $B)$.

সেট প্রকাশের পদ্ধতি (*Method of describing Sets*) :

সেটকে প্রধানত দুই পদ্ধতিতে প্রকাশ করা হয়। যথা : (১) তালিকা পদ্ধতি (*Roster Method* বা *Tabular Method*) এবং (২) সেট গঠন পদ্ধতি (*Set Builder Method*)

(১) তালিকা পদ্ধতি : এ পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদান সুনির্দিষ্টভাবে উলেখ করে দ্বিতীয় বন্ধনী { } এর মধ্যে আবদ্ধ করা হয় এবং একাধিক উপাদান থাকলে 'কমা' ব্যবহার করে উপাদানগুলোকে আলাদা করা হয়।
যেমন, $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C =${নিলয়, তিশা, শুভ্রা} ইত্যাদি।

(২) সেট গঠন পদ্ধতি : এ পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদান সুনির্দিষ্টভাবে উলেখ না করে উপাদান নির্ধারণের জন্য সাধারণ ধর্মের উলেখ থাকে। যেমন : $A = \{x : x$ স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যা}, $B = \{x : x$ নবম শ্রেণির প্রথম পাঁচজন শিক্ষার্থী} ইত্যাদি।

এখানে, ':' দ্বারা 'এরূপ যেন' বা সংক্ষেপে 'যেন' (*such that*) বুঝায়। যেহেতু এ পদ্ধতিতে সেটের উপাদান নির্ধারণের জন্য শর্ত বা নিয়ম (*Rule*) দেওয়া থাকে, এ জন্য এ পদ্ধতিকে *Rule Method* ও বলা হয়।

উদাহরণ ১। $A = \{7, 14, 21, 28\}$ সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।
সমাধান : A সেটের উপাদানসমূহ $7, 14, 21, 28$
এখানে, প্রত্যেকটি উপাদান 7 দ্বারা বিভাজ্য, অর্থাৎ 7 এর গুণিতক এবং 28 এর বড় নয়।
$\therefore$ $A = \{x : x, 7$ এর গুণিতক এবং $x \leq 28\}$.

উদাহরণ ২। $B = \{x : x, 28$ এর গুণনীয়ক} সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।
সমাধান : এখানে, $28 = 1 \times 28$
$= 2 \times 14$
$= 4 \times 7$
$\therefore$ 28 এর গুণনীয়কসমূহ $1, 2, 4, 7, 14, 28$
নির্ণেয় সেট $B = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$

উদাহরণ ৩। $C = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $x^2 < 18$ } সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।
সমাধান : ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাসমূহ $1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\ldots$
এখানে, $x = 1$ হলে, $x^2 = 1^2 = 1$
$x = 2$ হলে, $x^2 = 2^2 = 4$
$x = 3$ হলে, $x^2 = 3^2 = 9$
$x = 4$ হলে, $x^2 = 4^2 = 16$
$x = 5$ হলে, $x^2 = 5^2 = 25$; যা 18 এর চেয়ে বড়
$\therefore$ শর্তানুসারে গ্রহণযোগ্য ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাসমূহ $1, 2, 3, 4$
$\therefore$ নির্ণেয় সেট $C = \{1, 2, 3, 4\}$.

কাজ : ১। $C = \{-9, -6, -3, 3, 6, 9\}$ সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।
২। $Q = \{y : y$ পূর্ণ সংখ্যা এবং $y^3 \leq 27\}$ সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সসীম সেট *(Finite Set)* : যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায়, একে সসীম সেট বলে। যেমন, $D = \{x, y, z\}$, $E = \{3, 6, 9, ..., 60\}$, $F = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা এবং $30 < x < 70\}$ ইত্যাদি সসীম সেট। এখানে, D সেটে 3 টি উপাদান, E সেটে 20 টি উপাদান এবং F সেটে 9 টি উপাদান আছে।

অসীম সেট *(Infinite Set)* : যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় না, একে অসীম সেট বলে। যেমন, $A = \{x : x$ বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, পূর্ণসংখ্যার সেট $Z = \{.......-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.......\}$, মূলদ সংখ্যার সেট $Q = \{\frac{P}{q} : P$ ও q পূর্ণ সংখ্যা এবং $q \neq 0\}$, বাস্তব সংখ্যার সেট R ইত্যাদি অসীম সেট।

উদাহরণ ৪। দেখাও যে, সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট একটি অসীম সেট।
সমাধান : স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$
N সেট থেকে বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহ নিয়ে গঠিত সেট $A = \{1, 3, 5, 7, ...\}$
জোড় " " " " " $B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$
3 এর গুণিতকসমূহের সেট $C = \{3, 6, 9, 12, ...\}$ ইত্যাদি।
এখানে, N সেট থেকে গঠিত A, B, C সেটসমূহে উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় না। ফলে A, B, C অসীম সেট।
$\therefore$ N একটি অসীম সেট।

কাজ : নিচের সেটগুলো থেকে সসীম সেট ও অসীম সেট লেখ :
১। $\{3, 5, 7\}$ ২। $\{1, 2, 2^2, ...2^{10}\}$ ৩। $\{3, 3^2, 3^3, ...\}$ ৪। $\{x : x$ পূর্ণসংখ্যা এবং $x < 4\}$
৫। $\left\{\frac{p}{q} : p\right.$ ও q পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1\}$ ৬। $\{y : y \in N$ এবং $y^2 < 100 < y^3\}$.

ফাঁকা সেট *(Empty Set)* : যে সেটের কোনো উপাদান নেই একে ফাঁকা সেট বলে। ফাঁকা সেটকে ϕ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন : হলিক্রস স্কুলের তিনজন ছাত্রের সেট, $\{x \in N : 10 < x < 11\}$, $\{x \in N : x$ মৌলিক সংখ্যা এবং $23 < x < 29\}$ ইত্যাদি।

ভেনচিত্র (*Venn-Diagram*) : জন ভেন (১৮৩৪–১৮৮৩) চিত্রের সাহায্যে সেট প্রকাশ করার রীতি প্রবর্তন করেন। এতে বিবেচনাধীন সেটগুলোকে সমতলে অবস্থিত বিভিন্ন আকারের জ্যামিতিক চিত্র যেমন আয়তাকার ক্ষেত্র, বৃত্তাকার ক্ষেত্র এবং ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ব্যবহার করা হয়। জন ভেনের নামানুসারে চিত্রগুলো ভেন চিত্র নামে পরিচিত।

উপসেট (*Subset*) : $A = \{a, b\}$ একটি সেট। A সেটের উপাদান থেকে $\{a, b\}$, $\{a\}$, $\{b\}$ সেটগুলো গঠন করা যায়। আবার, কোনো উপাদান না নিয়ে $\varnothing$ সেট গঠন করা যায়।

এখানে, গঠিত $\{a, b\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\varnothing$ প্রত্যেকটি A সেটের উপসেট।

সুতরাং কোনো সেট থেকে যতগুলো সেট গঠন করা যায়, এদের প্রত্যেকটি সেটকে ঐ সেটের উপসেট বলা হয়। উপসেটের চিহ্ন $\subseteq$। যদি B সেট A এর উপসেট হয় তবে $B \subseteq A$ লেখা হয়। B, A এর উপসেট অথবা B *is a subset of A*. উপরের উপসেটগুলোর মধ্যে $\{a, b\}$ সেট A এর সমান।

$\therefore$ প্রত্যেকটি সেট নিজের উপসেট।

আবার, যেকোনো সেট থেকে $\varnothing$ সেট গঠন করা যায়।

$\therefore$ $\varnothing$ যেকোনো সেটের উপসেট।

ধরি $P = \{1, 2, 3\}$ এবং $Q = \{2, 3\}$, $R = \{1, 3\}$ তাহলে Q এবং R প্রত্যেকে P এর উপসেট

অথ্যাৎ $Q \subseteq P$ এবং $R \subseteq P$.

প্রকৃত উপসেট *(Proper Subset)* :

B যদি A এর উপসেট হয় এবং A এর অন্তত একটি উপাদান B সেটে না থাকে, তাহলে B কে A এর প্রকৃত উপসেট বলা হয় এবং $B \subset A$ লেখা হয়। যেমন, $A = \{3, 4, 5, 6\}$ এবং $B = \{3, 5\}$ দুইটি সেট। এখানে, B এর সব উপাদান A সেটে বিদ্যমান; সুতরাং B, A সেটের একটি উপসেট। কিন্তু A সেটের উপাদান 4 (অথবা 6) B সেটে নাই।

$\therefore$ B, A এর একটি প্রকৃত উপসেট। পূর্ববর্তী উদাহরণে Q এবং R প্রত্যেকে P এর প্রকৃত উপসেট।

উদাহরণ ৫। $P = \{x, y, z\}$ এর উপসেটগুলো লেখ এবং উপসেটগুলো থেকে প্রকৃত উপসেট বাছাই কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $P = \{x, y, z\}$

P এর উপসেটসমূহ $\{x, y, z\}$, $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$, $\varnothing$.

P এর প্রকৃত উপসেটসমূহ $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$.

সেটের সমতা *(Equivalent Sets)* :

দুইটি সেটের উপাদান একই হলে, সেট দুইটিকে সমান বলা হয়। যেমন : $A = \{3, 5, 7\}$ এবং $B = \{5, 3, 7\}$ দুইটি সমান সেট এবং $A = B$ চিহ্ন দ্বারা লেখা হয়। লক্ষ করি: $A = B$ যদি এবং কেবল যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$ হয়।

আবার, $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{5, 3, 3, 7\}$ এবং $C = \{7, 7, 3, 5, 5\}$ হলে A, B ও C সেট তিনটি সমতা বুঝায়। অর্থাৎ, $A = B = C$.

লক্ষণীয়, সেটের উপাদানগুলোর ক্রম বদলালে বা কোনো উপাদান পুনরাবৃত্তি করলে সেটের কোনো পরিবর্তন হয় না।

সেটের অন্তর *(Difference of Set)* : মনে করি, $A=\{1,2,3,4,5\}$ এবং $B=\{3,5\}$। সেট A থেকে সেট B এর উপাদানগুলো বাদ দিলে যে সেটটি হয় তা $\{1,2,4\}$ এবং লেখা হয় $A\setminus B$ বা $A-B=\{1,2,3,4,5\}-\{3,5\}=\{1,2,4\}$

সুতরাং, কোনো সেট থেকে অন্য একটি সেট বাদ দিলে যে সেট গঠিত হয় তাকে বাদ সেট বলে।

উদাহরণ ৬। $P=\{x : x, 12$ এর গুণনীয়কসমূহ$\}$ এবং $Q=\{x : x, 3$ এর গুণিতক এবং $x\leq 12\}$ হলে $P-Q$ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $P=\{x : x, 12$ এর গুণনীয়কসমূহ$\}$

এখানে, 12 এর গুণনীয়কসমূহ $1,2,3,4,6,12$

$\therefore\ P=\{1,2,3,4,6,12\}$

আবার, $Q=\{x : x, 3$ এর গুণিতক এবং $x\leq 12\}$

এখানে, 12 পর্যন্ত 3 এর গুণিতকসমূহ $3,6,9,12$

$\therefore\ Q=\{3,6,9,12\}$

$\therefore\ P-Q=\{1,2,3,4,6,12\}-\{3,6,9,12\}=\{1,2,4\}$

নির্ণেয় সেট : $\{1,2,4\}$

সার্বিক সেট *(Universal Set)* :

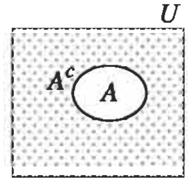
আলোচনা সংশ্লিষ্ট সকল সেট একটি নির্দিষ্ট সেটের উপসেট। যেমন : $A=\{x,y\}$ সেটটি $B=\{x,y,z\}$ এর একটি উপসেট। এখানে, B সেটকে A সেটের সাপেক্ষে সার্বিক সেট বলে।

সুতরাং আলোচনা সংশ্লিষ্ট সকল সেট যদি একটি নির্দিষ্ট সেটের উপসেট হয় তবে ঐ নির্দিষ্ট সেটকে এর উপসেটগুলোর সাপেক্ষে সার্বিক সেট বলে।

সার্বিক সেটকে সাধারণত U দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তবে অন্য প্রতীকের সাহায্যেও সার্বিক সেট প্রকাশ করা যায়। যেমন : সকল জোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $C=\{2,4,6........\}$ এবং সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N=\{1,2,3,4,..........\}$ হলে, C সেটের সাপেক্ষে সার্বিক সেট হবে N.

পূরক সেট *(Complement of a Set)* :

U সার্বিক সেট এবং A সেটটি U এর উপসেট। A সেটের বহির্ভূত সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে A সেটের পূরক সেট বলে। A এর পূরক সেটকে A^c বা A' দ্বারা প্রকাশ করা হয়। গাণিতিকভাবে $A^c=U\setminus A$.



মনে করি, P ও Q দুইটি সেট এবং Q সেটের যেসব উপাদান P সেটের উপাদান নয়, ঐ উপাদানগুলোর সেটকে P এর প্রেক্ষিতে Q এর পূরক সেট বলা হয় এবং লেখা হয় $Q^c=P\setminus Q$.

উদাহরণ ৭। $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6, 7\}$ এবং $B = \{1, 3, 5\}$ হলে A^c ও B^c নির্ণয় কর।

সমাধান : $A^c = U \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{2, 4, 6, 7\} = \{1, 3, 5\}$

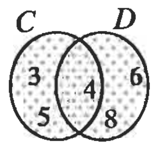
এবং $B^c = U \setminus B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{1, 3, 5\} = \{2, 4, 6, 7\}$

নির্ণেয় সেট $A^c = \{1, 3, 5\}$ এবং $B^c = \{2, 4, 6, 7\}$

সংযোগ সেট *(Union of Sets)* :

দুই বা ততোধিক সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে তাদের সংযোগ সেট বলা হয়। মনে করি, A ও B দুইটি সেট। A ও B সেটের সংযোগকে $A \cup B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় A সংযোগ B অথবা A *Union* B । সেট গঠন পদ্ধতিতে $A \cup B = \{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$.

উদাহরণ ৮। $C = \{3, 4, 5\}$ এবং $D = \{4, 6, 8\}$ হলে, $C \cup D$ নির্ণয় কর।



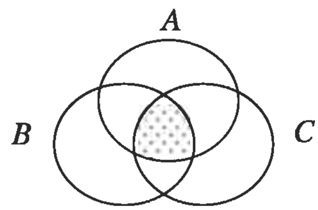
$C \cup D$

সমাধান : দেওয়া আছে, $C = \{3, 4, 5\}$ এবং $D = \{4, 6, 8\}$

$\therefore\ C \cup D = \{3, 4, 5\} \cup \{4, 6, 8\} = \{3, 4, 5, 6, 8\}$

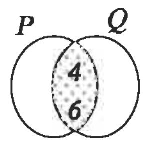
ছেদ সেট *(Intersection of Sets)*:

দুই বা ততোধিক সেটের সাধারণ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে তাদের ছেদ সেট বলে। মনে করি, A ও B দুইটি সেট। A ও B এর ছেদ সেটকে $A \cap B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় A ছেদ B বা A *intersection* B । সেট গঠন পদ্ধতিতে $A \cap B = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$.



$A \cap B \cap C$

উদাহরণ ৯। $P = \{x \in N : 2 < x \leq 6\}$ এবং $Q = \{x \in N : x$ জোড় সংখ্যা এবং $x \leq 8\}$ হলে, $P \cap Q$ নির্ণয় কর।



$P \cap Q$

সমাধান : দেওয়া আছে, $P = \{x \in N : 2 < x \leq 6\} = \{3, 4, 5, 6\}$

এবং $Q = \{x \in N : x$ জোড় সংখ্যা এবং $x \leq 8\} = \{2, 4, 6, 8\}$

$\therefore\ P \cap Q = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{4, 6\}$

নির্ণেয় সেট $\{4, 6\}$

নিশ্ছেদ সেট *(Disjoint Sets)*:

দুইটি সেটের মধ্যে যদি কোনো সাধারণ উপাদান না থাকে তবে সেট দুইটি পরস্পর নিশ্ছেদ সেট। মনে করি, A ও B দুইটি সেট। $A \cap B = \phi$ হলে A ও B পরস্পর নিশ্ছেদ সেট হবে।

কাজ : $U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $E = \{1, 5, 9\}$ এবং $F = \{3, 7, 11\}$ হলে, $E^c \cup F^c$ এবং $E^c \cap F^c$ নির্ণয় কর।

শক্তি সেট *(Power Sets)*:

$A=\{m, n\}$ একটি সেট। A সেটের উপসেটসমূহ $\{m, n\}, \{m\}, \{n\}, \phi$; এখানে উপসেটসমূহের সেট $\{m, n\}, \{m\}, \{n\}, \phi$ কে A সেটের শক্তি সেট বলা হয়। A সেটের শক্তি সেটকে $P(A)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সুতরাং কোনো সেটের সকল উপসেট দ্বারা গঠিত সেটকে ঐ সেটের শক্তি সেট বলা হয়।

উদাহরণ ১০। $A=\phi, B=\{a\}, C=\{a, b\}$ তিনটি সেট।

এখানে, $P(A)=\{\phi\}$

$\therefore$ A সেটের উপাদান সংখ্যা শূন্য এবং এর শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা = $1=2^0$

আবার, $P(B)=\{\{a\}, \phi\}$

$\therefore$ B সেটের উপাদান সংখ্যা 1 এবং এর শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা = $2=2^1$

এবং $P(C)=\{\{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \phi\}$

$\therefore$ C সেটের উপাদান সংখ্যা 2 এবং এর শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা = $4=2^2$

কোনো সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে, ঐ সেটের শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা 2^n হবে।

কাজ : $G=\{1, 2, 3\}$ হলে, $P(G)$ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $P(G)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^3।

ক্রমজোড় *(Ordered pair)* :

অষ্টম শ্রেণির আমেনা এবং সুমেনা বার্ষিক পরীক্ষায় মেধা তালিকায় যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় হলো। মেধা অনুসারে তাদেরকে (আমেনা, সুমেনা) জোড়া আকারে লেখা যায়। এরূপ নির্দিষ্ট করে দেওয়া জোড়া একটি ক্রমজোড়।

সুতরাং, একজোড়া উপাদানের মধ্যে কোন্‌টি প্রথম অবস্থানে আর কোনটি দ্বিতীয় অবস্থানে থাকবে, তা নির্দিষ্ট করে জোড়া আকারে প্রকাশকে ক্রমজোড় বলা হয়।

যদি কোনো ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান বা পদ x এবং দ্বিতীয় উপাদান বা পদ y হয়, তবে ক্রমজোড়টি (x, y) হবে। ক্রমজোড় (x, y) ও (a, b) সমান বা $(x, y)=(a, b)$ হবে যদি $x=a$ এবং $y=b$ হয়।

উদাহরণ ১১। $(2x+y, 3)=(6, x-y)$ হলে, (x, y) নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে $(2x+y, 3)=(6, x-y)$

ক্রমজোড়ের শর্তমতে, $2x+y=6$ .... (i)

এবং $x-y=3$ .... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই, $3x=9$ বা $x=3$

সমীকরণ (1) এ x এর মান বসিয়ে পাই, $6+y=6$ বা $y=0$

$\therefore$ $(x, y)=(3, 0)$.

কার্তেসীয় গুণজ *(Cartesian Product)* :

ওয়াংসু তাঁর বাড়ির একটি কামরার ভিতরের দেওয়ালের সাদা বা নীল রং এবং বাইরের দেওয়ালে লাল বা হলুদ বা সবুজ রং এর প্রলেপ দেওয়ার সিদ্ধান্ত নিলেন। ভিতরের দেওয়ালের রং এর সেট $A=$ {সাদা, নীল} এবং বাইরের দেওয়ালে রং এর সেট $B=$ {লাল, হলুদ, সবুজ}। ওয়াংসু তাঁর কামরার রং প্রলেপ (সাদা, লাল), (সাদা, হলুদ), (সাদা, সবুজ), (নীল, লাল), (নীল, হলুদ), (নীল, সবুজ) ক্রমজোড় আকারে দিতে পারেন।

উক্ত ক্রমজোড়ের সেটকে লেখা হয়

$A\times B=$ {(সাদা, লাল), (সাদা, হলুদ), (সাদা, সবুজ), (নীল, লাল), (নীল, হলুদ), (নীল, সবুজ)}

এটিই কার্তেসীয় গুণজ সেট।

সেট গঠন পদ্ধতিতে, $A\times B=\{(x,y);x\in A$ এবং $y\in B\}$

$A\times B$ কে পড়া হয় A ক্রস B.

উদাহরণ ১২। $P=\{1,2,3\}$, $Q=\{3,4\}$ এবং $R=P\cap Q$ হলে, $P\times R$ এবং $R\times Q$ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $P=\{1,2,3\}$, $Q=\{3,4\}$

এবং $R=P\cap Q=\{1,2,3\}\cap\{3,4\}=\{3\}$

$\therefore\ P\times R=\{1,2,3\}\times\{3\}=\{(1,3),(2,3),(3,3)\}$

এবং $R\times Q=\{3\}\times\{3,4\}=\{(3,3),(3,4)\}$

কাজ : ১। $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3},1\right)=\left(1,\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right)$ হলে, (x,y) নির্ণয় কর।

২। $P=\{1,2,3\}$, $Q=\{3,4\}$ এবং $R=\{x,y\}$ হলে, $(P\cap Q)\times R$ এবং $(P\cap Q)\times Q$ নির্ণয় কর।

উদাহরণ ১৩। যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 311 এবং 419 কে ভাগ করলে প্রতি ক্ষেত্রে 23 অবশিষ্ট থাকে এদের সেট নির্ণয় কর।

সমাধান : যে স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 311 এবং 419 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 23 অবশিষ্ট থাকে, সে সংখ্যা হবে 23 অপেক্ষা বড় এবং $311-23=288$ এবং $419-23=396$ এর সাধারণ গুণনীয়ক।

মনে করি, 23 অপেক্ষা বড় 288 এর গুণনীয়কসমূহের সেট A এবং 396 এর গুণনীয়কসমূহের সেট B

এখানে, $288=1\times288=2\times144=3\times96=4\times72=6\times48=8\times36=9\times32=12\times24=16\times18$

$\therefore\ A=\{24,32,36,48,72,96,144,288\}$

আবার, $396=1\times396=2\times198=3\times132=4\times99=6\times66=9\times44=11\times36=12\times33=18\times22$

$\therefore\ B=\{33,36,44,66,99,132,198,396\}$

$\therefore\ A\cap B=\{24,32,36,48,72,96,144,288\}\cap\{33,36,44,66,99,132,198,396\}=\{36\}$

নির্ণেয় সেট $\{36\}$

উদাহরণ ১৪। $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A=\{1,2,6,7\}$, $B=\{2,3,5,6\}$ এবং $C=\{4,5,6,7\}$ হলে, দেখাও যে, (i) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ এবং (ii) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

সমাধান : (i)

সেট	উপাদান
$A\cup B$	1, 2, 3, 5, 6, 7
$(A\cup B)'$	4, 8
A'	3, 4, 5, 8
B'	1, 4, 7, 8
$A'\cap B'$	4, 8

$\therefore\ (A\cup B)'=A'\cap B'$

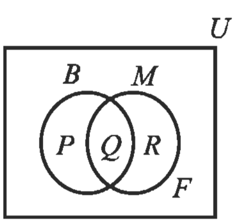
সমাধান : (ii)

সেট	উপাদান
$A\cap B$	2, 6
$(A\cap B)\cup C$	2, 4, 5, 6, 7
$A\cup C$	1, 2, 4, 5, 6, 7
$B\cup C$	2, 3, 4, 5, 6, 7
$(A\cup C)\cap(B\cup C)$	2, 4, 5, 6, 7

$\therefore\ (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

উদাহরণ ১৫। 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে কোনো পরীক্ষায় 92 জন বাংলায় 80 জন গণিতে এবং 70 জন উভয় বিষয়ে পাস করেছে। ভেনচিত্রের সাহায্যে তথ্যগুলো প্রকাশ কর এবং কতজন শিক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করেছে, তা নির্ণয় কর।

সমাধান : ভেনচিত্রে আয়তাকার ক্ষেত্রটি 100 জন শিক্ষার্থীর সেট U এবং বাংলায় ও গণিতে পাস শিক্ষার্থীদের সেট যথাক্রমে B ও M দ্বারা নির্দেশ করে। ফলে ভেনচিত্রটি চারটি নিশ্ছেদ সেটে বিভক্ত হয়েছে, যাদেরকে P, Q, R, F দ্বারা চিহ্নিত করা হলো।



এখানে, উভয় বিষয়ে পাস শিক্ষার্থীদের সেট $Q=B\cap M$, যার সদস্য সংখ্যা 70

$P=$ শুধু বাংলায় পাস শিক্ষার্থীদের সেট, যার সদস্য সংখ্যা $= 88-70=18$

$R=$ শুধু গণিতে পাস শিক্ষার্থীদের সেট, যার সদস্য সংখ্যা $= 80-70=10$

$P \cup Q \cup R = B \cup M$, যেকোনো একটি বিষয়ে এবং উভয় বিষয়ে পাস শিক্ষার্থীদের সেট, যার সদস্য সংখ্যা = $18+10+70=98$

$F =$ উভয় বিষয়ে ফেল করা শিক্ষার্থীদের সেট, যার সদস্য সংখ্যা = $100-98=2$

$\therefore$ উভয় বিষয়ে ফেল করেছে 2 জন শিক্ষার্থী।

অনুশীলনী ২·১

১। নিচের সেটগুলোকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর :

(ক) $\{x \in N : x^2 > 9$ এবং $x^3 < 130\}$

(খ) $\{x \in Z : x^2 > 5$ এবং $x^3 \leq 36\}$

(গ) $\{x \in N : x, 36$ এর গুণনীয়ক এবং 6 এর গুণিতক$\}$

(ঘ) $\{x \in N : x^3 > 25$ এবং $x^4 < 264\}$

২। নিচের সেটগুলোকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর :

(ক) $\{3, 5, 7, 9, 11\}$ (খ) $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

(গ) $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$ (ঘ) $\{\pm 4, \pm 5, \pm 6\}$

৩। $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, a\}$ এবং $C = \{2, a, b\}$ হলে, নিচের সেটগুলো নির্ণয় কর :

(ক) $B \setminus C$ (খ) $A \cup B$ (গ) $A \cap C$ (ঘ) $A \cup (B \cap C)$ (ঙ) $A \cap (B \cup C)$

৪। $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ এবং $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ হলে, নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সত্যতা যাচাই কর :

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(B \cap C)' = B' \cup C'$

(iii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (iv) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

৫। $Q = \{x, y\}$ এবং $R = \{m, n, \ell\}$ হলে, $P(Q)$ এবং $P(R)$ নির্ণয় কর।

৬। $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$ এবং $C = A \cup B$ হলে, দেখাও যে, $P(C)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n, যেখানে n হচ্ছে C এর উপাদান সংখ্যা।

৭। (ক) $(x-1, y+2) = (y-2, 2x+1)$ হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $(ax-cy, a^2-c^2) = (0, ay-cx)$ হলে, (x, y) এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $(6x-y, 13) = (1, 3x+2y)$ হলে, (x, y) নির্ণয় কর।

৮। (ক) $P = \{a\}$, $Q = \{b, c\}$ হলে, $P \times Q$ এবং $Q \times P$ নির্ণয় কর।

(খ) $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ এবং $C = \{x, y\}$ হলে, $(A \cap B) \times C$ নির্ণয় কর।

(গ) $P = \{3, 5, 7\}$, $Q = \{5, 7\}$ এবং $R = P \setminus Q$ হলে, $(P \cup Q) \times R$ নির্ণয় কর।

৯। A ও B যথাক্রমে 35 এবং 45 এর সকল গুণনীয়কের সেট হলে, $A \cup B$ ও $A \cap B$ নির্ণয় কর।

১০। যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 346 এবং 556 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 31 অবশিষ্ট থাকে, এদের সেট নির্ণয় কর।

১১। কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 20 জন ফুটবল এবং 15 জন ক্রিকেট খেলা পছন্দ করে। দুইটি খেলাই পছন্দ করে তদ্রুপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা 10 ; কতজন শিক্ষার্থী দুইটি খেলাই পছন্দ করে না তা ভেন চিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

১২। 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে কোনো পরীক্ষায় 65% শিক্ষার্থী বাংলায়, 48% শিক্ষার্থী বাংলা ও ইংরেজি উভয় বিষয়ে পাস এবং 15% শিক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করেছে।

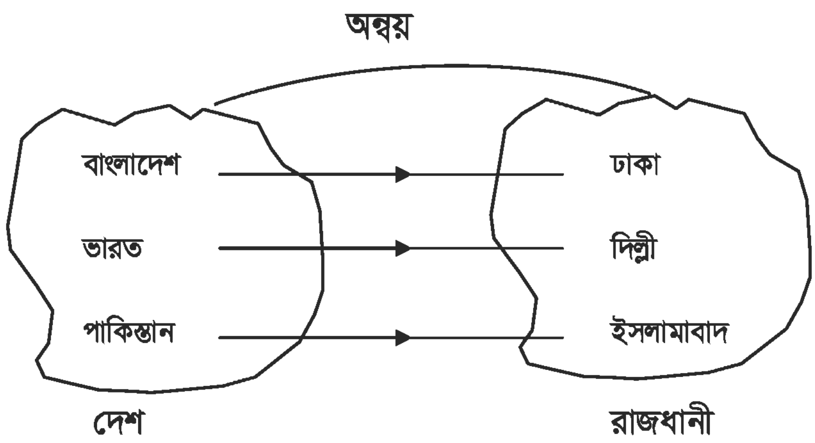
(ক) সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ ওপরের তথ্যগুলো ভেনচিত্রে প্রকাশ কর।

(খ) শুধু বাংলায় ও ইংরেজিতে পাস করেছে তাদের সংখ্যা নির্ণয় কর।

(গ) উভয় বিষয়ে পাস এবং উভয় বিষয়ে ফেল সংখ্যাদ্বয়ের মৌলিক গুণনীয়কসমূহের সেট দুইটির সংযোগ সেট নির্ণয় কর।

অন্বয় *(Relation)*

আমরা জানি, বাংলাদেশের রাজধানী ঢাকা, ভারতের রাজধানী দিল্লী এবং পাকিস্তানের রাজধানী ইসলামাবাদ। এখানে দেশের সাথে রাজধানীর একটি অন্বয় বা সম্পর্ক আছে। এ সম্পর্ক হচ্ছে দেশ–রাজধানী অন্বয়। উক্ত সম্পর্ককে সেট আকারে নিম্নরূপে দেখানো যায় :



অর্থাৎ দেশ–রাজধানীর অন্বয় = {(বাংলাদেশ, ঢাকা), (ভারত, দিলী), (পাকিস্তান, ইসলামাবাদ)}।

যদি A ও B দুইটি সেট হয় তবে সেটদ্বয়ের কার্তেসীয় গুণজ $A \times B$ সেটের অন্তর্গত ক্রমজোড়গুলোর অশূন্য উপসেট R কে A সেট হতে B সেটের একটি অন্বয় বা সম্পর্ক বলা হয়।

এখানে, R সেট $A \times B$ সেটের একটি উপসেট অর্থাৎ, $R \subseteq A \times B$

উদাহরণ ১৬। মনে করি, $A=\{3,5\}$ এবং $B=\{2,4\}$

$\therefore\ A\times B=\{3,5\}\times\{2,4\}=\{(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$

$\therefore\ R=\{(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$

যদি $x>y$ শর্ত হয় তবে, $R=\{(3,2),(5,2),(5,4)\}$

এবং যদি $x<y$ শর্ত হয় তবে, $R=\{3,4\}$

যখন A সেটের একটি উপাদান x ও B সেটের একটি উপাদান y এবং $(x,y)\in R$ হয়, তবে লেখা হয় $x\,R\,y$ এবং পড়া হয় x,y এর সাথে অন্বিত (x *is related to* y) অর্থাৎ উপাদান x, উপাদান y এর সাথে R সম্পর্কযুক্ত।

আবার, A সেট হতে A সেটের একটি অন্বয় অর্থাৎ $R\subseteq A\times A$ হলে, R কে A এর অন্বয় বলা হয়।

সুতরাং A এবং B দুইটি সেটের উপাদানগুলোর মধ্যে সম্পর্ক দেওয়া থাকলে $x\in A$ এর সঙ্গে সম্পর্কিত $y\in B$ নিয়ে যে সব ক্রমজোড় (x,y) পাওয়া যায়, এদের অশূন্য উপসেট হচ্ছে একটি অন্বয় ।

উদাহরণ ১৭। যদি $P=\{2,3,4\}$, $Q=\{4,6\}$ এবং P ও Q এর উপাদানগুলোর মধ্যে $y=2x$ সম্পর্ক বিবেচনায় থাকে তবে সংশ্লিষ্ট অন্বয় নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $P=\{2,3,4\}$ এবং $Q=\{4,6\}$

প্রশ্নানুসারে, $R=\{(x,y):x\in P,\ y\in Q$ এবং $y=2x\}$

এখানে, $P\times Q=\{2,3,4\}\times\{4,6\}=\{(2,4),(2,6),(3,4),(3,6),(4,4),(4,6)\}$

$\therefore\ R=\{(2,4),(3,6)\}$

নির্ণেয় অন্বয় $\{(2,4),(3,6)\}$

উদাহরণ ১৮। যদি $A=\{1,2,3\}$, $B=\{0,2,4\}$ এবং C ও D এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x=y-1$ সম্পর্ক বিবেচনায় থাকে, তবে সংশ্লিষ্ট অন্বয় বর্ণনা কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $A=\{1,2,3\}$, $B=\{0,2,4\}$

প্রশ্নানুসারে, অন্বয় $R=\{(x,y):x\in A,\ y\in B$ এবং $x=y-1\}$

এখানে, $A\times B=\{1,2,3\}\ \times\ \{0,2,4\}$

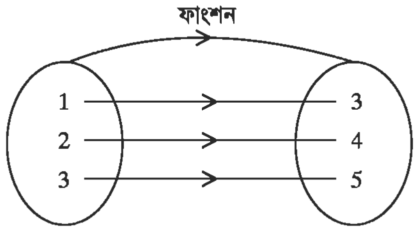
$=\ \{(1,0),(1,2),(1,4),(2,0),(2,2),(2,4),(3,0),(3,2),(3,4)\}$

$\therefore\ R=\{(1,2),(3,4)\}$

কাজ : যদি $C=\{2,5,6\}$, $D=\{4,5\}$ এবং C ও D এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x\le y$ সম্পর্ক বিবেচনায় থাকে তবে সংশ্লিষ্ট অন্বয় নির্ণয় কর।

ফাংশন *(Function) :*

নিচের A ও B সেটের অন্বয় লক্ষ করি :



এখানে, যখন $y=x+2$, তখন $x=1$ হলে, $y=3$

$x=2$ হলে, $y=4$

$x=3$ হলে, $y=5$

অর্থাৎ x এর এক–একটি মানের জন্য y এর মাত্র একটি মান পাওয়া যায় এবং x ও y–এর মধ্যে সম্পর্ক তৈরি হয় $y=x+2$ দ্বারা। সুতরাং দুইটি চলক x এবং y এমনভাবে সম্পর্কযুক্ত যেন x এর যেকোনো একটি মানের জন্য y এর একটি মাত্র মান পাওয়া যায়, তবে y কে x এর ফাংশন বলা হয়। x এর ফাংশনকে সাধারণত y, $f(x)$, $g(x)$, $F(x)$ ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

মনে করি, $y=x^2-2x+3$ একট ফাংশন। এখানে, x এর যে কোনো একটি মানের জন্য y এর একটি মাত্র মান পাওয়া যাবে। এখানে, x এবং y উভয়ই চলক, এখানে x এর মানের উপর y এর মান নির্ভরশীল। কাজেই x হচ্ছে স্বাধীন চলক এবং y হচ্ছে অধীন চলক।

উদাহরণ ১৯। $f(x)=x^2-4x+3$ হলে, $f(-1)$ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x)=x^2-4x+3$

$$\therefore\ f(-1)=(-1)^2-4(-1)+3=1+4+3=8$$

উদাহরণ ২০। যদি $g(x)=x^3+ax^2-3x-6$ হয়, তবে a এর কোন মানের জন্য $g(-2)=0$ হবে ?

সমাধান : দেওয়া আছে, $g(x)=x^3+ax^2-3x-6$

$$\therefore\ g(-2)=(-2)^3+a(-2)^2-3(-2)-6$$
$$=-8+4a+6-6$$
$$=-8+4a=4a-8$$

প্রশ্নানুসারে $g(-2)=0$

$\therefore\ 4a-8=0$

বা $4a=8$

বা $a=2$

$\therefore\ a=2$ হলে, $g(-2)=0$ হবে।

ডোমেন *(Domain)* ও রেঞ্জ *(Range)*

কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেটকে এর ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটকে এর রেঞ্জ বলা হয়।

মনে করি, A সেট থেকে B সেটে R একটি অন্বয় অর্থাৎ $R \subseteq A \times B$. Rএ অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান সমূহের সেট হবে R এর ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেট হবে R এর রেঞ্জ। R এর ডোমেনকে ডোম R এবং রেঞ্জকে রেঞ্জ R লিখে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ ২১। অন্বয় $S = \{(2,1), (2,2), (3,2), (4,5)\}$ অন্বয়টির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $S = \{(2,1), (2,2), (3,2), (4,5)\}$

S অন্বয়ে ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহ $2, 2, 3, 4$ এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহ $1, 2, 2, 5$.

$\therefore$ ডোম $S = \{2, 3, 4\}$ এবং রেঞ্জ $S = (1, 2, 5\}$

উদাহরণ ২২। $A = \{0, 1, 2, 3\}$ এবং $R = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x + 1\}$ হলে, R কে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর এবং ডোম R ও রেঞ্জ R নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $A = \{0, 1, 2, 3\}$ এবং $R = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x + 1\}$

R এর বর্ণিত শর্ত থেকে পাই , $y = x + 1$

এখন, প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $y = x + 1$ এর মান নির্ণয় করি।

x	0	1	2	3
y	1	2	3	4

যেহেতু $4 \notin A$, কাজেই $(3, 4) \notin R$

$\therefore \ R = \{(0,1), (1,2), (2,3)\}$

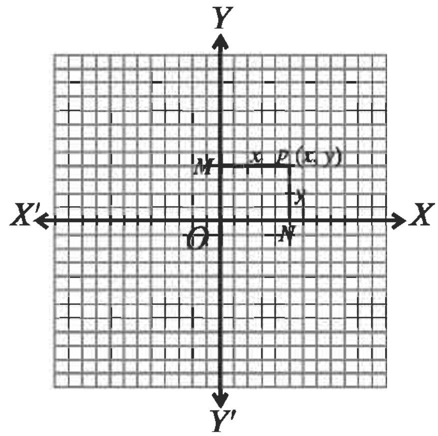
ডোম $R = \{0, 1, 2\}$ এবং রেঞ্জ $R = \{1, 2, 3\}$

> **কাজ :** ১। $S = \{(-3,8), (-2,3), (-1,0), (0,-1), (1,0), (2,3)\}$ হলে, S এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।
>
> ২। $S = \{(x, y) : x \in A$ এবং $y - x = 1\}$, যেখানে $A = \{-3, -2, -1, 0\}$ । ডোম S ও রেঞ্জ S নির্ণয় কর।

ফাংশনের লেখচিত্র *(Graph of a function)*

ফাংশনের চিত্ররূপকে লেখচিত্র বলা হয়। ফাংশনের ধারণা সুস্পষ্ট করার ক্ষেত্রে লেখচিত্রের গুরুত্ব অপরিসীম। ফরাসি দার্শনিক ও গণিতবিদ রেনে দেকার্ত (Rene Descartes : 1596–1650) সর্বপ্রথম বীজগণিত ও জ্যামিতির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপনে অগ্রণী ভূমিকা পালন করেন। তিনি কোনো সমতলে পরস্পর লম্বভাবে ছেদী দুইটি ফাংশনের সাহায্যে

বিন্দুর অবস্থান সুনির্দিষ্টভাবে নির্ণয়ের মাধ্যমে সমতলীয় জ্যামিতিতে আধুনিক ধারা প্রবর্তন করেন। তিনি পরস্পর লম্বভাবে ছেদী সরলরেখা দুইটিকে অক্ষরেখা হিসেবে আখ্যায়িত করেন এবং অক্ষদ্বয়ের ছেদ বিন্দুকে মূলবিন্দু বলেন। কোনো সমতলে পরস্পর লম্বভাবে ছেদী দুইটি সরলরেখা XOX' এবং YOY' আঁকা হলো। সমতলে অবস্থিত যেকোনো বিন্দুর অবস্থান এই রেখাদ্বয়ের মাধ্যমে সম্পূর্ণরূপে জানা সম্ভব। এই রেখাদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে অক্ষ *(axis)* বলা হয়। আনুভূমিক রেখা XOX' কে x–অক্ষ, উলম্ব রেখা YOY' কে y–অক্ষ এবং অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু O কে মূলবিন্দু (Origin) বলা হয়।



দুইটি অক্ষের সমতলে অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে অক্ষদ্বয়ের লম্ব দূরত্বের যথাযথ চিহ্নযুক্ত সংখ্যাকে ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক বলা হয়। মনে করি, অক্ষদ্বয়ের সমতলে অবস্থিত P যেকোনো বিন্দু। P থেকে XOX' এবং YOY' এর উপর যথাক্রমে PN ও PM লম্ব টানি। ফলে, $PM = ON$ যা YOY' হতে P বিন্দুর লম্ব দূরত্ব এবং $PN = OM$ যা XOX' হতে P বিন্দুর লম্ব দূরত্ব। যদি $PM = x$ এবং $PN = y$ হয়, তবে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)। এখানে, x কে ভুজ *(abscissa)* বা x স্থানাঙ্ক এবং y কে কোটি *(Ordinate)* বা y স্থানাঙ্ক বলা হয়। উলেখিত স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক বলা হয়।

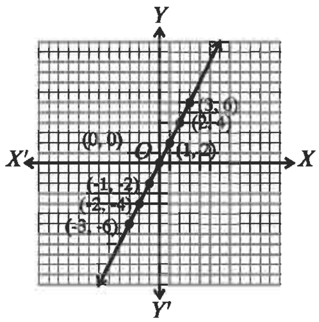
কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে সহজেই ফাংশনের জ্যামিতিক চিত্র দেখানো যায়। এজন্য সাধারণত x অক্ষ বরাবর স্বাধীন চলকের মান ও y অক্ষ বরাবর অধীন চলকের মান বসানো হয়।

$y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য ডোমেন থেকে স্বাধীন চলকের কয়েকটি মানের জন্য অধীন চলকের অনুরূপ মানগুলো বের করে ক্রমজোড় তৈরি করি। অতঃপর ক্রমজোড়গুলো উক্ত তলে স্থাপন করি। প্রাপ্ত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে রেখা টেনে যুক্ত করি, যা $y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র।

উদাহরণ ২৩। $y = 2x$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর। যেখানে, $-3 \le x \le 3$

সমাধান : $-3 \le x \le 3$ ডোমেনের x–এর কয়েকটি মানের জন্য y এর সংশ্লিষ্ট মান নির্ণয় করে তালিকা তৈরি করি।

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–6	–4	–2	0	2	4	6



ছক কাগজে প্রতি ক্ষুদ্রবর্গের বাহুকে একক ধরে, তালিকায় বিন্দুগুলো চিহ্নিত করি ও মুক্ত হস্তে যোগ করি।

উদাহরণ ২৪। $f(x)=\dfrac{3x+1}{3x-1}$ হলে $\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)+1}{f\left(\frac{1}{x}\right)-1}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x)=\dfrac{3x+1}{3x-1}$

$$\therefore\ f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3\cdot\frac{1}{x}+1}{3\cdot\frac{1}{x}-1}=\frac{\frac{3}{x}+1}{\frac{3}{x}-1}=\frac{3+x}{3-x}$$ [লব ও হরকে x দ্বারা গুণ করে]

সুতরাং , $\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)+1}{f\left(\frac{1}{x}\right)-1} = \dfrac{3+x+3-x}{3+x-3+x}$ [যোজন–বিয়োজন করে]

$=\dfrac{6}{2x}=\dfrac{3}{x}$ (উত্তর)

উদাহরণ ২৫। $f(y)=\dfrac{y^3-3y^2+1}{y(1-y)}$ হলে দেখাও যে, $f\left(\dfrac{1}{y}\right)=f(1-y)$

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(y)=\dfrac{y^3-3y^2+1}{y(1-y)}$

$$\therefore\ f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{\left(\frac{1}{y}\right)^3-3\left(\frac{1}{y}\right)^2+1}{\frac{1}{y}\left(1-\frac{1}{y}\right)}=\frac{\frac{1-3y+y^3}{y^3}}{\frac{y-1}{y^2}}$$

$$=\frac{1-3y+y^3}{y^3}\times\frac{y^2}{y-1}=\frac{1-3y+y^3}{y(y-1)}$$

আবার, $f(1-y)=\dfrac{(1-y)^3-3(1-y)^2+1}{(1-y)\{1-(1-y)\}}$

$$=\frac{1-3y+3y^2-y^3-3(1-2y+y^2)+1}{(1-y)(1-1+y)}$$

$$=\frac{1-3y+3y^2-y^3-3+6y-3y^2+1}{y(1-y)}$$

$$=\frac{-1+3y-y^3}{y(1-y)}=\frac{-(1-3y+y^3)}{-y(y-1)}$$

$$=\frac{1-3y+y^3}{y(y-1)}$$

$\therefore\ f\left(\dfrac{1}{y}\right)=f(1-y)$. দেখানো হলো।

অনুশীলনী ২·২

১। 8 এর গুণনীয়ক সেট কোনটি ?

(ক) $\{8, 16, 24, ...\}$ (খ) $\{1, 2, 4, 8\}$ (গ) $\{2, 4, 8\}$ (ঘ) $\{1, 2\}$

২। সেট C হতে সেট B এ একটি সম্পর্ক R হলে নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) $R \subset C$ (খ) $R \subset B$ (গ) $R \subseteq C \times B$ (ঘ) $C \times B \subseteq R$

৩। $A = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ হলে, নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

(i) A সেটের সঠিক প্রকাশ কোনটি ?

(ক) $\{x \in N: 6 < x < 13\}$ (খ) $\{x \in N: 6 \leq x < 13\}$

(গ) $\{x \in N: 6 \leq x \leq 13\}$ (ঘ) $\{x \in N: 6 < x \leq 13\}$

(ii) A সেটের মৌলিক সংখ্যাগুলোর সেট কোনটি ?

(ক) $\{6, 8, 10, 12\}$ (খ) $\{7, 9, 11, 13\}$ (গ) $\{7, 11, 13\}$ (ঘ) $A = \{9, 12\}$

(iii) A সেটের 3 এর গুণিতকগুলোর সেট কোনটি ?

(ক) $\{6, 9\}$ (খ) $\{6, 11\}$ (গ) $\{9, 12\}$ (ঘ) $\{6, 9, 12\}$

(iv) A সেটের জোড় গুণনীয়কের বৃহত্তম সেট কোনটি ?

(ক) $\{1, 13\}$ (খ) $\{1, 2, 3, 6\}$ (গ) $\{1, 3, 9\}$ (ঘ) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

৪। যদি $A = \{3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$ হয়, তবে A ও B এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x > y$ সম্পর্ক বিবেচনা করে রিলেশনটি নির্ণয় কর।

৫। যদি $C = \{2, 5\}$, $D = \{4, 6\}$ এবং C ও D এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x + 1 < y$ সম্পর্কটি বিবেচনায় থাকে তবে রিলেশনটি নির্ণয় কর।

৬। $f(x) = x^4 + 5x - 3$ হলে, $f(-1)$, $f(2)$ এবং $f\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

৭। যদি $f(y) = y^3 + \text{k}y^2 - 4\text{y} - 8$ হয়, তবে k এর কোন মানের জন্য $f(-2) = 0$ হবে ?

৮। $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ হলে, x এর কোন মানের জন্য $f(x) = 0$ হবে ?

৯। যদি $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ হয়, তবে $\frac{f\left(\frac{1}{x^2}\right)+1}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)-1}$ এর মান নির্ণয় কর।

১০। $g(x) = \frac{1+x^2+x^4}{x^2}$ হলে, দেখাও যে, $g\left(\frac{1}{x^2}\right) = g(x^2)$

১১। নিচের অন্বয়গুলো থেকে ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর :

(ক) $R = \{(2,1), (2,2), (2,3)\}$ (খ) $S = \{(-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4)\}$

(গ) $F = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), (1,1), (1,-1), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, -2\right)\right\}$

১২। নিচের অন্বয়গুলোকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর :

(ক) $R = \{(x, y) : x \in A, \ y \in A$ এবং $x + y = 1\}$, যেখানে $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(খ) $F = \{(x, y) : x \in C, \ y \in C$ এবং $y = 2x\}$, যেখানে $C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

১৩। ছক কাগজে $(-3, 2)$, $(0, -5)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right)$ বিন্দুগুলো স্থাপন কর।

১৪। ছক কাগজে $(1, 2)$, $(-1, 1)$, $(11, 7)$ বিন্দু তিনটি স্থাপন করে দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

১৫. সার্বিক সেট $U = \{x : x \in N$ এবং x বিজোড় সংখ্যা$\}$

$A = \{x \in N : 2 \leq x \leq 7\}$

$B = \{x \in N : 3 < x < 6\}$

$C = \{x \in N : x^2 > 5$ এবং $x^3 < 130\}$

ক. A সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

খ. A' এবং $C \setminus B$ নির্ণয় কর।

গ. $B \times C$ এবং $P(A \cap C)$ নির্ণয় কর।

তৃতীয় অধ্যায়

বীজগাণিতিক রাশি

(Algebraic Expressions)

বীজগণিতে অনেক সমস্যা সমাধানে বীজগাণিতিক সূত্র ব্যবহৃত হয়। আবার অনেক বীজগাণিতিক রাশি বিশ্লেষণ করে উৎপাদকের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়ে থাকে। তাই এ অধ্যায়ে বীজগাণিতিক সূত্রের সাহায্যে সমস্যা সমাধান এবং রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ বিষয়ক বিষয়বস্তু শিক্ষার্থী উপযোগী করে উপস্থাপন করা হয়েছে। অধিকন্তু নানাবিধ গাণিতিক সমস্যা বীজগাণিতিক সূত্রের সাহায্যে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করেও সমাধান করা যায়। পূর্বের শ্রেণিতে বীজগাণিতিক সূত্রাবলি ও এদের সাথে সম্পৃক্ত অনুসিদ্ধান্তগুলো সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। এ অধ্যায়ে ঐগুলো পুনরুল্লেখ করা হলো এবং উদাহরণের মাধ্যমে এদের কতিপয় প্রয়োগ দেখানো হলো। এছাড়াও এ অধ্যায়ে বর্গ ও ঘনের সম্প্রসারণ, ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ এবং বাস্তব সমস্যা সমাধানে বীজগাণিতিক সূত্রের গঠন ও প্রয়োগ সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- বীজগাণিতিক সূত্র প্রয়োগ করে বর্গ ও ঘনের সম্প্রসারণ করতে পারবে।
- ভাগশেষ উপপাদ্য কী ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং তা প্রয়োগ করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- বাস্তব সমস্যা সমাধানের জন্য বীজগাণিতিক সূত্র গঠন করতে পারবে এবং সূত্র প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

৩·১ বীজগাণিতিক রাশি

প্রক্রিয়া চিহ্ন এবং সংখ্যানির্দেশক অক্ষর প্রতীক এর অর্থবোধক বিন্যাসকে বীজগাণিতিক রাশি বলা হয়। যেমন, $2a+3b-4c$ একটি বীজগাণিতিক রাশি। বীজগাণিতিক রাশিতে $a, b, c, p, q, r, m, n, x, y, z, ...$ ইত্যাদি বর্ণমালার মাধ্যমে বিভিন্ন তথ্য প্রকাশ করা হয়। বীজগাণিতিক রাশি সংবলিত বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে এই সমস্ত বর্ণমালাকে ব্যবহার করা হয়। পাটিগণিতে শুধু ধনাত্মক সংখ্যা ব্যবহৃত হয়; অন্যদিকে বীজগণিতে শূন্যসহ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সকল সংখ্যা ব্যবহার করা হয়। বীজগণিতকে পাটিগণিতের সর্বায়নকৃত রূপ বলা হয়। বীজগাণিতিক রাশিতে ব্যবহৃত সংখ্যাগুলো ধ্রুবক *(constant)*, এদের মান নির্দিষ্ট।

বীজগাণিতিক রাশিতে ব্যবহৃত অক্ষর প্রতীকগুলো চলক *(variables)*, এদের মান নির্দিষ্ট নয়, এরা বিভিন্ন মান ধারণ করতে পারে।

৩·২ বীজগাণিতিক সূত্রাবলি

বীজগাণিতিক প্রতীক দ্বারা প্রকাশিত যেকোনো সাধারণ নিয়ম বা সিদ্ধান্তকে বীজগাণিতিক সূত্র বলা হয়। সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণিতে বীজগাণিতিক সূত্রাবলি ও এতদসংক্রান্ত অনুসিদ্ধান্তগুলো আলোচনা করা হয়েছে। এ অধ্যায়ে ঐগুলো পুনরুল্লেখ করে কতিপয় প্রয়োগ দেখানো হলো।

সূত্র ১। $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

সূত্র ২। $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

মন্তব্য : সূত্র ১ ও সূত্র ২ হতে দেখা যায় যে, $a^2 + b^2$ এর সাথে $2ab$ অথবা $-2ab$ যোগ করলে একটি পূর্ণবর্গ, অর্থাৎ $(a+b)^2$ অথবা $(a-b)^2$ পাওয়া যায়। সূত্র ১ এ b এর স্থলে $-b$ বসালে সূত্র ২ পাওয়া যায় :

$$\{a+(-b)\}^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$$

অর্থাৎ, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

অনুসিদ্ধান্ত ১। $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

অনুসিদ্ধান্ত ২। $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৩। $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

প্রমাণ : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$= a^2 - 2ab + b^2 + 4ab$$

$$= (a-b)^2 + 4ab$$

অনুসিদ্ধান্ত ৪। $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

প্রমাণ : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab$$

$$= (a+b)^2 - 4ab$$

অনুসিদ্ধান্ত ৫। $a^2 + b^2 = \dfrac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}$

প্রমাণ : সূত্র ১ ও সূত্র ২ হতে,

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

যোগ করে, $2a^2 + 2b^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2$

বা, $2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$

সুতরাং, $(a^2 + b^2) = \dfrac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}$

অনুসিদ্ধান্ত ৬। $ab = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$

প্রমাণ : সূত্র ১ ও সূত্র ২ হতে,

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

বিয়োগ করে, $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$

বা, $ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$

সুতরাং, $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

মন্তব্য : অনুসিদ্ধান্ত ৬ প্রয়োগ করে যেকোনো দুইটি রাশির গুণফলকে দুইটি রাশির বর্গের বিয়োগফল বা অন্তর রূপে প্রকাশ করা যায়।

সূত্র ৩। $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

অর্থাৎ, দুইটি রাশির বর্গের বিয়োগফল = রাশি দুইটির যোগফল × রাশি দুইটির বিয়োগফল

সূত্র ৪। $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + ab$

অর্থাৎ, $(x+a)(x+b) = x^2 + (a$ ও b এর বীজগাণিতিক যোগফল) $x + (a$ ও b এর গুণফল)

বর্গসূত্রের সম্প্রসারণ :

$a+b+c$ রাশিটিতে তিনটি পদ আছে। একে $(a+b)$ এবং c এ দুইটি পদের সমষ্টিরূপে বিবেচনা করা যায়। অতএব, সূত্র ১ প্রয়োগ করে $a+b+c$ রাশিটির বর্গ করে পাই,

$$(a+b+c)^2 = \{(a+b)+c\}^2$$
$$= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

সূত্র ৫। $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$

অনুসিদ্ধান্ত ৭। $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac)$

অনুসিদ্ধান্ত ৮। $2(ab+bc+ac) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$

লক্ষ করি : সূত্র ৫ প্রয়োগ করে পাই,

(i) $(a+b-c)^2 = \{a+b+(-c)\}^2$
$$= a^2 + b^2 + (-c)^2 + 2ab + 2b(-c) + 2a(-c)$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$$

(ii) $(a-b+c)^2 = \{a+(-b)+c\}^2$
$$= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2(-b)c + 2ac$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$$

(iii) $(a-b-c)^2 = \{a+(-b)+(-c)\}^2$
$= a^2+(-b)^2+(-c)^2+2a(-b)+2(-b)(-c)+2a(-c)$
$= a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ac$

উদাহরণ ১। $(4x+5y)$ এর বর্গ কত ?

সমাধান : $(4x+5y)^2 = (4x)^2+2\times(4x)\times(5y)+(5y)^2$
$= 16x^2+40xy+25y^2$

উদাহরণ ২। $(3a-7b)$ এর বর্গ কত ?

সমাধান : $(3a-7b)^2 = (3a)^2-2\times(3a)\times(7b)+(7b)^2$
$= 9a^2-42ab+49b^2$

উদাহরণ ৩। বর্গের সূত্র প্রয়োগ করে 996 এর বর্গ নির্ণয় কর।

সমাধান : $(996)^2 = (1000-4)^2$
$= (1000)^2-2\times1000\times4+(4)^2$
$= 1000000-8000+16 = 1000016-8000$
$= 992016$

উদাহরণ ৪। $a+b+c+d$ এর বর্গ কত ?

সমাধান : $(a+b+c+d)^2 = \{(a+b)+(c+d)\}^2$
$= (a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2$
$= a^2+2ab+b^2+2(ac+ad+bc+bd)+c^2+2cd+d^2$
$= a^2+2ab+b^2+2ac+2ad+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2$
$= a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$

কাজ : সূত্রের সাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর :
১। $3xy+2ax$ ২। $4x-3y$ ৩। $x-5y+2z$

উদাহরণ ৫। সরল কর : $(5x+7y+3z)^2+2(7x-7y-3z)(5x+7y+3z)+(7x-7y-3z)^2$

সমাধান : ধরি, $5x+7y+3z = a$ এবং $7x-7y-3z = b$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^2+2.b.a+b^2$
$= a^2+2ab+b^2$
$= (a+b)^2$
$= \{(5x+7y+3z)+(7x-7y-3z)\}^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
$= (5x+7y+3z+7x-7y-3z)^2$
$= (12x)^2$
$= 144x^2$

উদাহরণ ৬। $x-y=2$ এবং $xy=24$ হলে, $x+y$ এর মান কত ?

সমাধান : $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=(2)^2+4\times 24=4+96=100$

$\therefore\ x+y=\pm\sqrt{100}=\pm 10$

উদাহরণ ৭। যদি $a^4+a^2b^2+b^4=3$ এবং $a^2+ab+b^2=3$ হয়, তবে a^2+b^2 এর মান কত ?

সমাধান : $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2)^2+2a^2b^2+(b^2)^2-a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$

$=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$

$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

$\therefore\ 3=3(a^2-ab+b^2)$ [মান বসিয়ে]

বা, $a^2-ab+b^2=\frac{3}{3}=1$

এখন, $a^2+ab+b^2=3$ এবং $a^2-ab+b^2=1$ যোগ করে পাই, $2(a^2+b^2)=4$

বা, $a^2+b^2=\frac{4}{2}=2$

$\therefore\ a^2+b^2=2$

উদাহরণ ৮। প্রমাণ কর যে, $(a+b)^4-(a-b)^4=8ab(a^2+b^2)$

সমাধান : $(a+b)^4-(a-b)^4=\{(a+b)^2\}^2-\{(a-b)^2\}^2$

$=\{(a+b)^2+(a-b)^2\}\{(a+b)^2-(a-b)^2\}$

$=2(a^2+b^2)\times 4ab$ $[\because (a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ এবং $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab]$

$=8ab(a^2+b^2)$

$\therefore\ (a+b)^4-(a-b)^4=8ab(a^2+b^2)$

উদাহরণ ৯। $a+b+c=15$ এবং $a^2+b^2+c^2=83$ হলে, $ab+bc+ac$ এর মান কত ?

সমাধান : এখানে, $2(ab+bc+ac)$

$=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$

$=(15)^2-83$

$=225-83$

$=142$

$\therefore\ ab+bc+ac=\frac{142}{2}=71$

বিকল্প পদ্ধতি :

আমরা জানি,

$(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ac)$

বা, $(15)^2=83+2(ab+bc+ac)$

বা, $225-83=2(ab+bc+ac)$

বা, $2(ab+bc+ac)=142$

$\therefore\ ab+bc+ac=\frac{142}{2}=71$

উদাহরণ ১০। $a+b+c=2$ এবং $ab+bc+ac=1$ হলে, $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$ এর মান কত ?

সমাধান : $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

$= a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2+2ca+a^2$

$= (a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)+(a^2+b^2+c^2)$

$= (a+b+c)^2+\{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)\}$

$= (2)^2+(2)^2-2\times 1$

$= 4+4-2=8-2=6$

উদাহরণ ১১। $(2x+3y)(4x-5y)$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান : ধরি, $2x+3y=a$ এবং $4x-5y=b$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি = $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{2x+3y+4x-5y}{2}\right)^2-\left(\frac{2x+3y-4x+5y}{2}\right)^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]

$= \left(\frac{6x-2y}{2}\right)^2-\left(\frac{8y-2x}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{2(3x-y)}{2}\right)^2-\left(\frac{2(4y-x)}{2}\right)^2$

$= (3x-y)^2-(4y-x)^2$

$\therefore \quad (2x+3y)(4x-5y)=(3x-y)^2-(4y-x)^2$

কাজ : ১। সরল কর : $(4x+3y)^2+2(4x+3y)(4x-3y)+(4x-3y)^2$

২। $x+y+z=12$ এবং $x^2+y^2+z^2=50$ হলে, $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ৩.১

১। সূত্রের সাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর :

(ক) $2a+3b$ (খ) $2ab+3bc$ (গ) $x^2+\frac{2}{y^2}$ (ঘ) $a+\frac{1}{a}$ (ঙ) $4y-5x$ (চ) $ab-c$

(ছ) $5x^2-y$ (জ) $x+2y+4z$ (ঝ) $3p+4q-5r$ (ঞ) $3b-5c-2a$ (ট) $ax-by-cz$

(ঠ) $a-b+c-d$ (ড) $2a+3x-2y-5z$ (ঢ) 101 (ণ) 997 (ত) 1007

২। সরল কর :

(ক) $(2a+7)^2+2(2a+7)(2a-7)+(2a-7)^2$

(খ) $(3x+2y)^2+2(3x+2y)(3x-2y)+(3x-2y)^2$

(গ) $(7p+3r-5x)^2-2(7p+3r-5x)(8p-4r-5x)+(8p-4r-5x)^2$

(ঘ) $(2m+3n-p)^2+(2m-3n+p)^2-2(2m+3n-p)(2m-3n+p)$

(ঙ) $6\cdot35\times6\cdot35+2\times6\cdot35\times3\cdot65+3\cdot65\times3\cdot65$

(চ) $5874\times5874+3774\times3774-7548\times5874$

(ছ) $\dfrac{7529\times7529-7519\times7519}{7529+7519}$

(জ) $\dfrac{2345\times2345-759\times759}{2345-759}$

৩। $a-b=4$ এবং $ab=60$ হলে, $a+b$ এর মান কত ?

৪। $a+b=7$ এবং $ab=12$ হলে, $a-b$ এর মান কত ?

৫। $a+b=9m$ এবং $ab=18m^2$ হলে, $a-b$ এর মান কত ?

৬। $x-y=2$ এবং $xy=63$ হলে, x^2+y^2 এর মান কত ?

৭। $x-\dfrac{1}{x}=4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^4+\dfrac{1}{x^4}=322$.

৮। $2x+\dfrac{2}{x}=3$ হলে, $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ এর মান কত ?

৯। $a+\dfrac{1}{a}=2$ হলে, দেখাও যে, $a^2+\dfrac{1}{a^2}=a^4+\dfrac{1}{a^4}$.

১০। $a+b=\sqrt{7}$ এবং $a-b=\sqrt{5}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $8ab(a^2+b^2)=24$

১১। $a+b+c=9$ এবং $ab+bc+ca=31$ হলে, $a^2+b^2+c^2$ এর মান নির্ণয় কর।

১২। $a^2+b^2+c^2=9$ এবং $ab+bc+ca=8$ হলে, $(a+b+c)^2$ এর মান কত ?

১৩। $a+b+c=6$ এবং $a^2+b^2+c^2=14$ হলে, $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

১৪। $x+y+z=10$ এবং $xy+yz+zx=31$ হলে, $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2$ এর মান কত ?

১৫। $x=3, y=4$ এবং $z=5$ হলে, $9x^2+16y^2+4z^2-24xy-16yz+12zx$ এর মান নির্ণয় কর।

১৬। প্রমাণ কর যে, $\left\{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2-\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2\right\}^2=\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2-\left(\dfrac{x^2-y^2}{2}\right)^2$

১৭। $(a+2b)(3a+2c)$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

১৮। $(x+7)(x-9)$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

১৯। $x^2+10x+24$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

২০। $a^4+a^2b^2+b^4=8$ এবং $a^2+ab+b^2=4$ হলে, (i) a^2+b^2, (ii) ab-এর মান নির্ণয় কর।

৩.৩ ঘন সংবলিত সূত্রাবলি

সূত্র ৬। $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$= a^3+b^3+3ab(a+b)$

প্রমাণ : $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$

$= (a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$

$= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$

$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$= a^3+b^3+3ab(a+b)$

অনুসিদ্ধান্ত ৯। $a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$

সূত্র ৭। $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$= a^3-b^3-3ab(a-b)$

প্রমাণ : $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2$

$= (a-b)(a^2-2ab+b^2)$

$= a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)$

$= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$

$= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$= a^3-b^3-3ab(a-b)$

লক্ষ করি : সূত্র ৬ এ b এর স্থলে $-b$ বসালে সূত্র ৭ পাওয়া যায় :

$$\{a+(-b)\}^3 = a^3+(-b)^3+3a(-b)\{a+(-b)\}$$

অর্থাৎ, $(a-b)^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$

অনুসিদ্ধান্ত ১০। $a^3-b^3 = (a-b)^3+3ab(a-b)$

সূত্র ৮। $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

প্রমাণ : $a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$

$= (a+b)\{(a+b)^2-3ab\}$

$= (a+b)(a^2+2ab+b^2-3ab)$

$= (a+b)(a^2-ab+b^2)$

সূত্র ৯। $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

প্রমাণ : $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

$= (a-b)\{(a-b)^2 + 3ab\}$

$= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$

$= (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

উদাহরণ ১২। $2x + 3y$ এর ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান : $(2x+3y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x(3y)^2 + (3y)^3$

$= 8x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot 9y^2 + 27y^3$

$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

উদাহরণ ১৩। $2x - y$ এর ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান : $(2x-y)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 y + 3 \cdot 2x \cdot y^2 - y^3$

$= 8x^3 - 3 \cdot 4x^2 y + 6xy^2 - y^3$

$= 8x^3 - 12x^2 y + 6xy^2 - y^3$

কাজ : সূত্রের সাহায্যে ঘন নির্ণয় কর :

১। $3x + 2y$ ২। $3x - 4y$ ৩। 397

উদাহরণ ১৪। $x = 37$ হলে, $8x^3 + 72x^2 + 216x + 216$ এর মান কত ?

সমাধান : $8x^3 + 72x^2 + 216x + 216$

$= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 6 + 3 \cdot 2x.(6)^2 + (6)^3$

$= (2x+6)^3$

$= (2 \times 37 + 6)^3$ [মান বসিয়ে]

$= (74+6)^3$

$= (80)^3$

$= 512000$

উদাহরণ ১৫। যদি $x - y = 8$ এবং $xy = 5$ হয়, তবে $x^3 - y^3 + 8(x+y)^2$ এর মান কত ?

সমাধান : $x^3 - y^3 + 8(x+y)^2$

$= (x-y)^3 + 3xy(x-y) + 8\{(x-y)^2 + 4xy\}$

$= (8)^3 + 3 \times 5 \times 8 + 8(8^2 + 4 \times 5)$ [মান বসিয়ে]

$= 8^3 + 15 \times 8 + 8(64 + 20)$

$= 8^3 + 15 \times 8 + 8 \times 84$

$= 8(8^2 + 15 + 84)$

$= 8(64 + 15 + 84)$

$= 8 \times 163$

$= 1304$

উদাহরণ ১৬। $a^2-\sqrt{3}a+1=0$ হলে, $a^3+\frac{1}{a^3}$ এর মান কত ?

সমাধান : দেওয়া আছে, $a^2-\sqrt{3}a+1=0$

বা, $a^2+1=\sqrt{3}a$ বা, $\frac{a^2+1}{a}=\sqrt{3}$

বা, $\frac{a^2}{a}+\frac{1}{a}=\sqrt{3}$ বা, $a+\frac{1}{a}=\sqrt{3}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি = $a^3+\frac{1}{a^3}$

$= \left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3a\cdot\frac{1}{a}\left(a+\frac{1}{a}\right)$

$= \left(\sqrt{3}\right)^3-3\left(\sqrt{3}\right)$ $[\because a+\frac{1}{a}=\sqrt{3}]$

$= 3\sqrt{3}-3\sqrt{3}$

$= 0$

উদাহরণ ১৭। সরল কর : $(a-b)(a^2+ab+b^2)+(b-c)(b^2+bc+c^2)+(c-a)(c^2+ca+a^2)$

সমাধান : $(a-b)(a^2+ab+b^2)+(b-c)(b^2+bc+c^2)+(c-a)(c^2+ca+a^2)$

$= a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3$

$= 0$

উদাহরণ ১৮। যদি $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a^3+\frac{1}{a^3}=18\sqrt{3}.$

সমাধান : দেওয়া আছে, $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\therefore \frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}$ [লব ও হরকে $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$ $= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}$

$= \sqrt{3}-\sqrt{2}$

$\therefore a+\frac{1}{a}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

$= \sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=2\sqrt{3}$

এখন, $a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\cdot a\cdot\frac{1}{a}\left(a+\frac{1}{a}\right)$

$= \left(2\sqrt{3}\right)^3-3\left(2\sqrt{3}\right)$ $[\because a+\frac{1}{a}=2\sqrt{3}]$

$= 2^3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^3-3\times2\sqrt{3}$

$= 8\cdot3\sqrt{3}-6\sqrt{3}$

$= 24\sqrt{3}-6\sqrt{3}$

$= 18\sqrt{3}$ (প্রমাণিত)

কাজ : ১। $x=-2$ হলে, $27x^3-54x^2+36x-8$ এর মান কত ?

২। $a+b=5$ এবং $ab=6$ হলে, $a^3+b^3+4(a-b)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

৩। $x=\sqrt{5}+\sqrt{3}$ হলে, $x^3+\frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ৩.২

১। সূত্রের সাহায্যে ঘন নির্ণয় কর :

(ক) $2x+5$ (খ) $2x^2+3y^2$ (গ) $4a-5x^2$ (ঘ) $7m^2-2n$ (ঙ) 403 (চ) 998

(ছ) $2a-b-3c$ (জ) $2x+3y+z$

২। সরল কর :

(ক) $(4a-3b)^3-3(4a-3b)^2(2a-3b)+3(4a-3b)(2a-3b)^2-(2a-3b)^3$

(খ) $(2x+y)^3+3(2x+y)^2(2x-y)+3(2x+y)(2x-y)^2+(2x-y)^3$

(গ) $(7x+3b)^3-(5x+3b)^3-6x(7x+3b)(5x+3b)$

(ঘ) $(x-15)^3+(16-x)^3+3(x-15)(16-x)$

(ঙ) $(a+b+c)^3-(a-b-c)^3-6(b+c)\{a^2-(b+c)^2\}$

(চ) $(m+n)^6-(m-n)^6-12mn(m^2-n^2)^2$

(ছ) $(x+y)(x^2-xy+y^2)+(y+z)(y^2-yz+z^2)+(z+x)(z^2-zx+x^2)$

(জ) $(2x+3y-4z)^3+(2x-3y+4z)^3+12x\{4x^2-(3y-4z)^2\}$

৩। $a-b=5$ এবং $ab=36$ হলে, a^3-b^3 এর মান কত ?

৪। যদি $a^3-b^3=513$ এবং $a-b=3$ হয়, তবে ab এর মান কত ?

৫। $x = 19$ এবং $y = -12$ হলে, $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ এর মান নির্ণয় কর।

৬। যদি $a = 15$ হয়, তবে $8a^3 + 60a^2 + 150a + 130$ এর মান কত ?

৭। $a = 7$ এবং $b = -5$ হলে, $(3a-5b)^3 + (4b-2a)^3 + 3(a-b)(3a-5b)(4b-2a)$ এর মান কত

৮। যদি $a + b = m, a^2 + b^2 = n$ এবং $a^3 + b^3 = p^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $m^3 + 2p^3 = 3mn$.

৯। যদি $x + y = 1$ হয়, তবে, দেখাও যে, $x^3 + y^3 - xy = (x-y)^2$

১০। $a + b = 3$ এবং $ab = 2$ হলে, (ক) $a^2 - ab + b^2$ এবং (খ) $a^3 + b^3$ এর মান নির্ণয় কর।

১১। $a - b = 5$ এবং $ab = 36$ হলে, (ক) $a^2 + ab + b^2$ এবং (খ) $a^3 - b^3$ এর মান নির্ণয় কর।

১২। $m + \frac{1}{m} = a$ হলে, $m^3 + \frac{1}{m^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

১৩। $x - \frac{1}{x} = p$ হলে, $x^3 - \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

১৪। যদি $a - \frac{1}{a} = 1$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^3 - \frac{1}{a^3} = 4.$

১৫। যদি $a + b + c = 0$ হয়, তবে দেখাও যে,

(ক) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (খ) $\frac{(b+c)^2}{3bc} + \frac{(c+a)^2}{3ca} + \frac{(a+b)^2}{3ab} = 1$

১৬। $p - q = r$ হলে, দেখাও যে, $p^3 - q^3 - r^3 = 3pqr$

১৭। $2x - \frac{2}{x} = 3$ হলে, দেখাও যে, $8\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = 63$

১৮। $a = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ হলে, $\frac{a^6 - 1}{a^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

৩·৪ উৎপাদকে বিশ্লেষণ

কোনো রাশি দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের সমান হলে, শেষোক্ত রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত রাশির উৎপাদক বা গুণনীয়ক বলা হয়।

কোনো বীজগাণিতিক রাশির সম্ভাব্য উৎপাদকগুলো নির্ণয় করার পর রাশিটিকে লব্ধ উৎপাদকগুলোর গুণফলরূপে প্রকাশ করাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ বলা হয়।

বীজগাণিতিক রাশিগুলো এক বা একাধিক পদবিশিষ্ট হতে পারে। সেজন্য উক্ত রাশির উৎপাদকগুলোও এক বা একাধিক পদবিশিষ্ট হতে পারে।

উৎপাদক নির্ণয়ের কতিপয় কৌশল :

(ক) কোনো বহুপদীর প্রত্যেক পদে সাধারণ উৎপাদক থাকলে তা প্রথমে বের করে নিতে হয়। যেমন :

(i) $3a^2b+6ab^2+12a^2b^2=3ab(a+2b+4ab)$

(ii) $2ab(x-y)+2bc(x-y)+3ca(x-y)=(x-y)(2ab+2bc+3ca)$

(খ) একটি রাশিকে পূর্ণ বর্গ আকারে প্রকাশ করে :

উদাহরণ ১। $4x^2+12x+9$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $4x^2+12x+9=(2x)^2+2\times 2x\times 3+(3)^2$

$=(2x+3)^2=(2x+3)(2x+3)$

উদাহরণ ২। $9x^2-30xy+25y^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $9x^2-30xy+25y^2$

$=(3x)^2-2\times 3x\times 5y+(5y)^2$

$=(3x-5y)^2=(3x-5y)(3x-5y)$

(গ) একটি রাশিকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করে এবং $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ সূত্র প্রয়োগ করে :

উদাহরণ ৩। $a^2-1+2b-b^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $a^2-1+2b-b^2=a^2-(b^2-2b+1)$

$=a^2-(b-1)^2=\{a+(b-1)\}\{a-(b-1)\}$

$=(a+b-1)(a-b+1)$

উদাহরণ ৪। a^4+64b^4 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $a^4+64b^4=(a^2)^2+(8b^2)^2$

$=(a^2)^2+2\times a^2\times 8b^2+(8b^2)^2-16a^2b^2$

$=(a^2+8b^2)^2-(4ab)^2$

$=(a^2+8b^2+4ab)(a^2+8b^2-4ab)$

$=(a^2+4ab+8b^2)(a^2-4ab+8b^2)$

কাজ : উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

১। $abx^2+acx^3+adx^4$ ২। $xa^2-144xb^2$ ৩। $x^2-2xy-4y-4$

(ঘ) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ **সূত্রটি ব্যবহার করে :**

উদাহরণ ৫। $x^2+12x+35$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $x^2+12x+35=x^2+(5+7)x+5\times 7$

$= (x+5)(x+7)$

এ পদ্ধতিতে x^2+px+q আকারের বহুপদীর উৎপাদক নির্ণয় করা সম্ভব হয় যদি দুইটি পূর্ণসংখ্যা a ও b নির্ণয় করা যায় যেন, $a+b=p$ এবং $ab=q$ হয়। এজন্য q এর দুইটি স্বচিহ্ন উৎপাদক নিতে হয় যাদের বীজগাণিতিক সমষ্টি p হয়। $q>0$ হলে, a ও b একই চিহ্নযুক্ত হবে এবং $q<0$ হলে, a ও b বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে।

উদাহরণ ৬। x^2-5x+6 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $x^2-5x+6=x^2+(-2-3)x+(-2)(-3)$

$= (x-2)(x-3)$

উদাহরণ ৭। $x^2-2x-35$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $x^2-2x-35$

$= x^2+(-7+5)x+(-7)(+5)$

$= (x-7)(x+5)$

উদাহরণ ৮। x^2+x-20 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : x^2+x-20

$= x^2+(5-4)x+(5)(-4)$

$= (x+5)(x-4)$

(ঙ) ax^2+bx+c **আকারের বহুপদীর মধ্যপদ বিভক্তিকরণ পদ্ধতিতে :**

$ax^2+bx+c=(rx+p)(sx+q)$ হবে

যদি $ax^2+bx+c=rsx^2+x(rq+sp)x+pq$

অর্থাৎ, $a=rs, b=rq+sp$ এবং $c=pq$ হয়।

সুতরাং, $ac=rspq=(rq)(sp)$ এবং $b=rq+sp$

অতএব, ax^2+bx+c আকারের বহুপদীর উৎপাদক নির্ণয় করতে হলে ac, অর্থাৎ, x^2 এর সহগ এবং x বর্জিত পদের গুণফলকে এমন দুইটি উৎপাদকে প্রকাশ করতে হবে, যাদের বীজগাণিতিক সমষ্টি x এর সহগ b এর সমান হয়।

উদাহরণ ৯। $12x^2+35x+18$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $12x^2+35x+18$

এখানে, $12\times 18=216=27\times 8$ এবং $27+8=35$

$\therefore\ 12x^2+35x+18=12x^2+27x+8x+18$

$= 3x(4x+9)+2(4x+9)$

$= (4x+9)(3x+2)$

উদাহরণ ১০। $3x^2 - x - 14$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $3x^2 - x - 14 = 3x^2 - 7x + 6x - 14$

$= x(3x-7) + 2(3x-7)$

$= (3x-7)(x+2)$

কাজ : উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

১। $x^2 + x - 56$ ২। $16x^3 - 46x^2 + 15x$ ৩। $12x^2 + 17x + 6$

(চ) একটি রাশিকে পূর্ণ ঘন আকারে প্রকাশ করে :

উদাহরণ ১১। $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

$= (2x)^3 + 3 \times (2x)^2 \times 3y + 3 \times 2x \times (3y)^2 + (3y)^3$

$= (2x+3y)^3 = (2x+3y)(2x+3y)(2x+3y)$

(ছ) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ **এবং** $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ **সূত্র দুইটি ব্যবহার করে:**

উদাহরণ ১২। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (i) $8a^3 + 27b^3$ (ii) $a^6 - 64$

সমাধান : (i) $8a^3 + 27b^3 = (2a)^3 + (3b)^3$

$= (2a+3b)\{(2a)^2 - 2a \times 3b + (3b)^2\}$

$= (2a+3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$

(ii) $a^6 - 64 = (a^2)^3 - (4)^3$

$= (a^2-4)\{(a^2)^2 + a^2 \times 4 + (4)^2\}$

$= (a^2-4)(a^4 + 4a^2 + 16)$

কিন্তু $a^2 - 4 = a^2 - 2^2 = (a+2)(a-2)$

এবং $a^4 + 4a^2 + 16 = (a^2)^2 + (4)^2 + 4a^2$

$= (a^2+4)^2 - 2(a^2)(4) + 4a^2$

$= (a^2+4)^2 - 4a^2$

$= (a^2+4)^2 - (2a)^2$

$= (a^2+4+2a)(a^2+4-2a)$

$= (a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$

$\therefore a^6 - 64$

$= (a+2)(a-2)(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$

বিকল্প নিয়ম :

$a^6 - 64 = (a^3)^2 - (8)^2$

$= (a^3+8)(a^3-8)$

$= (a^3+2^3)(a^3-2^3)$

$= (a+2)(a^2-2a+4) \times (a-2)(a^2+2a+4)$

$= (a+2)(a-2)(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$

কাজ : উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

১। $2x^4 + 16x$ ২। $8 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$ ৩। $(a+b)^3 + (a-b)^3$

(জ) ভগ্নাংশসহগযুক্ত রাশির উৎপাদক :

ভগ্নাংশযুক্ত রাশির উৎপাদকগুলোকে বিভিন্নভাবে প্রকাশ করা যায়।

যেমন, $a^3+\frac{1}{27}=a^3+\frac{1}{3^3}=\left(a+\frac{1}{3}\right)\left(a^2-\frac{a}{3}+\frac{1}{9}\right)$

আবার, $a^3+\frac{1}{27}=\frac{1}{27}(27a^3+1)=\frac{1}{27}\{(3a)^3+(1)^3\}$

$$=\frac{1}{27}(3a+1)(9a^2-3a+1)$$

এখানে, দ্বিতীয় সমাধানে চলক–সংবলিত উৎপাদকগুলোর সকল সহগ পূর্ণসংখ্যা। প্রথম ও দ্বিতীয় সমাধান অভিন্ন।

$$\frac{1}{27}(3a+1)(9a^2-3a+1)$$

$$=\frac{1}{3}(3a+1)\times\frac{1}{9}(9a^2-3a+1)$$

$$=\left(a+\frac{1}{3}\right)\left(a^2-\frac{a}{3}+\frac{1}{9}\right)$$

উদাহরণ ১৩। $x^3+6x^2y+11xy^2+6y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $x^3+6x^2y+11xy^2+6y^3$

$$=\{x^3+3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x(2y)^2+(2y)^3\}-xy^2-2y^3$$

$$=(x+2y)^3-y^2(x+2y)$$

$$=(x+2y)\{(x+2y)^2-y^2\}$$

$$=(x+2y)(x+2y+y)(x+2y-y)$$

$$=(x+2y)(x+3y)(x+y)$$

$$=(x+y)(x+2y)(x+3y)$$

কাজ : উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

১। $\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}$ ২। $a^3+\frac{1}{8}$ ৩। $16x^2-25y^2-8xz+10yz$

অনুশীলনী ৩.৩

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (১ – ৪৩) :

১। $a^2+ab+ac+bc$
২। $ab+a-b-1$
৩। $(x-y)(x+y)+(x-y)(y+z)+(x-y)(z+x)$
৪। $ab(x-y)-bc(x-y)$
৫। $9x^2+24x+16$
৬। a^4-27a^2+1
৭। $x^4-6x^2y^2+y^4$
৮। $(a^2-b^2)(x^2-y^2)+4abxy$
৯। $4a^2-12ab+9b^2-4c^2$
১০। $9x^4-45a^2x^2+36a^4$
১১। $a^2+6a+8-y^2+2y$
১২। $16x^2-25y^2-8xz+10yz$
১৩। $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$
১৪। $x^2+13x+36$
১৫। x^4+x^2-20
১৬। $a^2-30a+216$
১৭। $x^6y^6-x^3y^3-6$
১৮। a^8-a^4-2
১৯। $a^2b^2-8ab-105$
২০। $x^2-37x-650$
২১। $4x^4-25x^2+36$
২২। $12x^2-38x+20$
২৩। $9x^2y^2-5xy^2-14y^2$
২৪। $4x^4-27x^2-81$
২৫। $ax^2+(a^2+1)x+a$
২৬। $3(a^2+2a)^2-22(a^2+2a)+40$
২৭। $14(x+z)^2-29(x+z)(x+1)-15(x+1)^2$
২৮। $(4a-3b)^2-2(4a-3b)(a+2b)-35(a+2b)^2$
২৯। $(a-1)x^2+a^2xy+(a+1)y^2$
৩০। $24x^4-3x$
৩১। $(a^2+b^2)^3+8a^3b^3$
৩২। x^3+3x^2+3x+2
৩৩। $a^3-6a^2+12a-9$
৩৪। $a^3-9b^3+(a+b)^3$
৩৫। $8x^3+12x^2+6x-63$
৩৬। $8a^3+\frac{b^3}{27}$
৩৭। $a^3-\frac{1}{8}$
৩৮। $\frac{a^6}{27}-b^6$
৩৯। $4a^2+\frac{1}{4a^2}-2+4a-\frac{1}{a}$
৪০। $(3a+1)^3-(2a-3)^3$
৪১। $(x+5)(x-9)-15$
৪২। $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-48$
৪৩। $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)-64$

৪৪। দেখাও যে, $x^3+9x^2+26x+24=(x+2)(x+3)(x+4)$

৪৫। দেখাও যে, $(x+1)(x+2)(3x-1)(3x-4)=(3x^2+2x-1)(3x^2+2x-8)$

৩·৫ ভাগশেষ উপপাদ্য *(Remainder Theorem)*

আমরা নিচের উদাহরণটি লক্ষ করি :

$6x^2 - 7x + 5$ কে $x - 1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল ও ভাগশেষ কত ?

$6x^2 - 7x + 5$ কে $x - 1$ দ্বারা সাধারণভাবে ভাগ করলে পাই,

$$
\begin{array}{l}
x-1\ )\ 6x^2 - 7x + 5\ (\ 6x - 1 \\
\qquad\quad \underline{6x^2 - 6x} \\
\qquad\qquad\ \ -x + 5 \\
\qquad\qquad\ \ \underline{-x + 1} \\
\qquad\qquad\qquad\ 4
\end{array}
$$

এখানে, ভাজক $x - 1$, ভাজ্য $6x^2 - 7x + 5$, ভাগফল $6x - 1$ এবং ভাগশেষ 4 ।

আমরা জানি, ভাজ্য = ভাজক $\times$ ভাগফল + ভাগশেষ

এখন যদি আমরা ভাজ্যকে $f(x)$, ভাগফলকে $h(x)$, ভাগশেষকে r ও ভাজককে $(x-a)$ দ্বারা সূচিত করি, তাহলে উপরের সূত্র থেকে পাই,

$f(x) = (x-a)\cdot h(x) + r$, এই সূত্রটি a এর সকল মানের জন্য সত্য।

উভয়পক্ষে $x = a$ বসিয়ে পাই,

$f(a) = (a-a)\cdot h(a) + r = 0\cdot h(a) + r = r$

সুতরাং, $r = f(a)$

অতএব, $f(x)$ কে $(x-a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f(a)$. এই প্রতিজ্ঞা ভাগশেষ উপপাদ্য *(Remainder theorem)* নামে পরিচিত। অর্থাৎ, ধনাত্মক মাত্রার কোনো বহুপদী $f(x)$ কে $(x-a)$ আকারের বহুপদী দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা ভাগ না করে বের করার সূত্রই হলো ভাগশেষ উপপাদ্য। উপরের উদাহরণে $a = 1$ হলে $f(x) = 6x^2 - 7x + 5;\ \therefore\ f(1) = 6 - 7 + 5 = 4$ যা ভাগফলের সমান। ভাজক বহুপদী $(x-a)$ এর মাত্রা 1, ভাজক যদি ভাজ্যের উৎপাদক হয়, তাহলে ভাগশেষ হবে শূন্য। আর যদি উৎপাদক না হয়, তাহলে ভাগশেষ থাকবে এবং তা হবে অশূন্য কোনো সংখ্যা।

প্রতিজ্ঞা : যদি $f(x)$ এর মাত্রা ধনাত্মক হয় এবং $a \neq 0$ হয়, তবে $f(x)$ কে $(ax+b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$.

প্রমাণ : ভাজক $ax + b$, $(a \neq 0)$ এর মাত্রা 1,

সুতরাং আমরা লিখতে পারি,

$$f(x) = (ax+b)\cdot h(x) + r = a\left(x + \frac{b}{a}\right)\cdot h(x) + r$$

$$\therefore\quad f(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right)\cdot a\cdot h(x) + r$$

দেখা যাচ্ছে যে, $f(x)$ কে $\left(x + \dfrac{b}{a}\right)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল হয়, $a\cdot h(x)$ এবং ভাগশেষ হয় r.

এখানে, ভাজক = $x-\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

সুতরাং ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী, $r=f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

অতএব, $f(x)$ কে $(ax+b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$.

অনুসিদ্ধান্ত : $(x-a)$, $f(x)$ এর উৎপাদক হবে, যদি এবং কেবল যদি $f(a)=0$ হয়।

প্রমাণ : ধরি, $f(a)=0$
অতএব, ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী, $f(x)$ কে $(x-a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ শূন্য হবে। অর্থাৎ, $(x-a)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে।
বিপরীতক্রমে, ধরি, $(x-a)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।
অতএব, $f(x)=(x-a)\cdot h(x)$, যেখানে $h(x)$ বহুপদী।
উভয়পক্ষে $x=a$ বসিয়ে পাই,
$f(a)=(a-a)\cdot h(a)=0$
$\therefore\ f(a)=0$.
সুতরাং, কোনো বহুপদী $f(x),(x-a)$ দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এবং কেবল যদি $f(a)=0$ হয়। এই সূত্র উৎপাদক উপপাদ্য *(Factor theorem)* নামে পরিচিত।

অনুসিদ্ধান্ত : $ax+b,\ a\neq 0$ হলে, রাশিটি কোনো বহুপদী $f(x)$ এর উৎপাদক হবে, যদি এবং কেবল যদি $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$ হয়।

প্রমাণ : $a\neq 0, ax+b=a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)$, $f(x)$ এর উৎপাদক হবে, যদি এবং কেবল যদি $\left(x+\dfrac{b}{a}\right)=x-\left(-\dfrac{b}{a}\right)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়। অর্থাৎ, যদি এবং কেবল যদি $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$ হয়। ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে উৎপাদক নির্ণয়ের এই পদ্ধতিকে শূন্যায়ন পদ্ধতিও *(Vanishing method)* বলে।

উদাহরণ ১। x^3-x-6 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
সমাধান : এখানে, $f(x)=x^3-x-6$ একটি বহুপদী। এর ধ্রুবপদ -6 এর উৎপাদকগুলো হচ্ছে $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ এবং ± 6.
এখন, $x=1,-1$ বসিয়ে দেখি, $f(x)$ এর মান শূন্য হয় না।
কিন্তু $x=2$ বসিয়ে দেখি, $f(x)$ এর মান শূন্য হয়।
অর্থাৎ, $f(2)=2^3-2-6=8-2-6=0$.
সুতরাং, $x-2$, $f(x)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক।

$$\begin{aligned}\therefore\ f(x) &= x^3-x-6\\ &= x^3-2x^2+2x^2-4x+3x-6\\ &= x^2(x-2)+2x(x-2)+3(x-2)\\ &= (x-2)(x^2+2x+3)\end{aligned}$$

উদাহরণ ২। $x^3-3xy^2+2y^3$ এবং $x^2+xy-2y^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : এখানে, x কে চলক এবং y কে ধ্রুবক হিসেবে বিবেচনা করি।

প্রদত্ত রাশিকে x-এর বহুপদী বিবেচনা করে

ধরি, $f(x)=x^3-3xy^2+2y^3$

তাহলে, $f(y)=y^3-3y\cdot y^2+2y^3=3y^3-3y^3=0$

$\therefore$ $(x-y)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3-3xy^2+2y^3$

$= x^3-x^2y+x^2y-xy^2-2xy^2+2y^3$

$= x^2(x-y)+xy(x-y)-2y^2(x-y)$

$= (x-y)(x^2+xy-2y^2)$

$= (x-y)(x^2+2xy-xy-2y^2)$

$= (x-y)\{x(x+2y)-y(x+2y)\}$

$= (x-y)(x+2y)(x-y)$

$= (x-y)^2(x+2y)$

আবার ধরি,

$g(x)=x^2+xy-2y^2$

$\therefore$ $g(y)=y^2+y^2-2y^2=0$

$\therefore$ $(x-y)$, $g(x)$ এর একটি উৎপাদক

$\therefore$ $x^2+xy-2y^2$

$= x^2-xy+2xy-2y^2$

$= x(x-y)+2y(x-y)$

$= (x-y)(x+2y)$

$\therefore$ $x^3-3xy^2+2y^3=(x-y)^2(x+2y)$

উদাহরণ ৩। $54x^4+27x^3a-16x-8a$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : ধরি, $f(x)=54x^4+27x^3a-16x-8a$

তাহলে, $f\left(-\frac{1}{2}a\right)=54\left(-\frac{1}{2}a\right)^4+27a\left(-\frac{1}{2}a\right)^3-16\left(-\frac{1}{2}a\right)-8a$

$=\frac{27}{8}a^4-\frac{27}{8}a^4+8a-8a=0$

$\therefore$ $x-\left(-\frac{1}{2}a\right)=x+\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(2x+a)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক, অতএব $2x+a$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $54x^4+27x^3a-16x-8a=27x^3(2x+a)-8(2x+a)=(2x+a)(27x^3-8)$

$=(2x+a)\{(3x)^3-(2)^3\}=(2x+a)(3x-2)(9x^2+6x+4)$

কাজ : উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

১। $x^3-21x-20$ ২। $2x^3-3x^2+3x-1$ ৩। $x^3+6x^2+11x+6$

অনুশীলনী ৩.৪

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

১। $6x^2-7x+1$
২। $3a^3+2a+5$
৩। $x^3-7xy^2-6y^3$
৪। x^2-5x-6
৫। $2x^2-x-3$
৬। $3x^2-7x-6$
৭। x^3+2x^2-5x-6
৮। x^3+4x^2+x-6
৯। $a^3+3a+36$
১০। a^4-4a+3
১১। $a^3-a^2-10a-8$
১২। x^3-3x^2+4x-4
১৩। $a^3-7a^2b+7ab^2-b^3$
১৪। x^3-x-24
১৫। $x^3+6x^2y+11xy^2+6y^3$
১৬। $2x^4-3x^3-3x-2$
১৭। $4x^4+12x^3+7x^2-3x-2$
১৮। $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x$
১৯। $4x^3-5x^2+5x-1$
২০। $18x^3+15x^2-x-2$

৩.৬ বাস্তব সমস্যা সমাধানে বীজগাণিতিক সূত্র গঠন ও প্রয়োগ

দৈনন্দিন কাজে বিভিন্ন সময়ে বিভিন্নভাবে আমরা বাস্তব সমস্যার সম্মুখীন হই। এই সমস্যাগুলো ভাষাগতভাবে বর্ণিত হয়। এ অনুচ্ছেদে আমরা ভাষাগতভাবে বর্ণিত বাস্তব পরিবেশের বিভিন্ন সমস্যা সমাধানকল্পে বীজগাণিতিক সূত্র গঠন এবং তা প্রয়োগ করার পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করব। এই আলোচনার ফলে শিক্ষার্থীরা একদিকে যেমন বাস্তব পরিবেশে গণিতের প্রয়োগ সম্পর্কে ধারণা পাবে, অন্যদিকে নিজেদের পারিপার্শ্বিক অবস্থায় গণিতের সম্পৃক্ততা বুঝতে পেরে গণিত শিক্ষার প্রতি আগ্রহী হবে।

সমস্যা সমাধানের পদ্ধতি :

(ক) প্রথমেই সতর্কতার সাথে সমস্যাটি পর্যবেক্ষণ করে এবং মনোযোগ সহকারে পড়ে কোনগুলো অজ্ঞাত এবং কী নির্ণয় করতে হবে তা চিহ্নিত করতে হবে।

(খ) অজ্ঞাত রাশিগুলোর একটিকে যেকোনো চলক (ধরি x) দ্বারা সূচিত করতে হবে। অতঃপর সমস্যাটি ভালোভাবে অনুধাবন করে অন্যান্য অজ্ঞাত রাশিগুলোকেও একই চলক x এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে হবে।

(গ) সমস্যাকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে বিভক্ত করে বীজগাণিতিক রাশি দ্বারা প্রকাশ করতে হবে।

(ঘ) প্রদত্ত শর্ত ব্যবহার করে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশগুলোকে একত্রে একটি সমীকরণে প্রকাশ করতে হবে।

(ঙ) সমীকরণটি সমাধান করে অজ্ঞাত রাশি x এর মান নির্ণয় করতে হবে।

বাস্তব সমস্যা সমাধানে বিভিন্ন সূত্র ব্যবহার করা হয়। সূত্রগুলো নিচে উল্লেখ করা হলো :

(১) দেয় বা প্রাপ্য বিষয়ক :

দেয় বা প্রাপ্য, $A=qn$ টাকা

যেখানে, q = জনপ্রতি দেয় বা প্রাপ্য টাকার পরিমাণ

n = লোকের সংখ্যা

(২) **সময় ও কাজ বিষয়ক :**

কয়েকজন লোক একটি কাজ সম্পন্ন করলে,

কাজের পরিমাণ, $W = qnx$

যেখানে, q = প্রত্যেকে একক সময়ে কাজের যে অংশ সম্পন্ন করে,

n = কাজ সম্পাদনকারীর সংখ্যা

x = কাজের মোট সময়

$W = n$ জনে x সময়ে কাজের যে অংশ সম্পন্ন করে

(৩) **সময় ও দূরত্ব বিষয়ক :**

নির্দিষ্ট সময়ে দূরত্ব, $d = vt$.

যেখানে, v = প্রতি ঘণ্টায় গতিবেগ

t = মোট সময়

(৪) **নল ও চৌবাচ্চা বিষয়ক :**

নির্দিষ্ট সময়ে চৌবাচ্চায় পানির পরিমাণ, $Q(t) = Q_o \pm qt$

যেখানে, Q_o = নলের মুখ খুলে দেওয়ার সময় চৌবাচ্চায় জমা পানির পরিমাণ।

q = প্রতি একক সময়ে নল দিয়ে যে পানি প্রবেশ করে অথবা বের হয়।

t = অতিক্রান্ত সময়।

$Q(t) = t$ সময়ে চৌবাচ্চায় পানির পরিমাণ (পানি প্রবেশ হওয়ার শর্তে '+' চিহ্ন এবং পানি বের হওয়ার শর্তে '–' চিহ্ন ব্যবহার করতে হবে)।

৫। **শতকরা অংশ বিষয়ক :**

$p = br$.

যেখানে, b = মোট রাশি

r = শতকরা ভগ্নাংশ = $\frac{s}{100} = s\%$

p = শতকরা অংশ = b এর $s\%$

৬। **লাভ–ক্ষতি বিষয়ক :**

$S = C(I \pm r)$

লাভের ক্ষেত্রে, $S = C(I + r)$

ক্ষতির ক্ষেত্রে, $S = C(I - r)$

যেখানে, S = বিক্রয়মূল্য

C = ক্রয়মূল্য

I = লাভ বা মুনাফা

r = লাভ বা ক্ষতির হার

(৭) **বিনিয়োগ–মুনাফা বিষয়ক :**

সরল মুনাফার ক্ষেত্রে,

$I = Pnr$

$A = P + I = P + Pnr = P(1 + nr)$,

চক্রবৃদ্ধি মুনাফার ক্ষেত্রে,

$A = P(1+r)^n$

যেখানে, I = n সময় পরে মুনাফা

n = নির্দিষ্ট সময়

P = মূলধন

r = একক সময়ে একক মূলধনের মুনাফা

A = n সময় পরে মুনাফাসহ মূলধন।

উদাহরণ ১। বার্ষিক ক্রীড়া অনুষ্ঠান করার জন্য কোনো এক সমিতির সদস্যরা 45,000 টাকার বাজেট করলেন এবং সিদ্ধান্ত নিলেন যে, প্রত্যেক সদস্যই সমান চাঁদা দিবেন। কিন্তু 5 জন সদস্য চাঁদা দিতে অসম্মতি জানালেন। এর ফলে প্রত্যেক সদস্যের মাথাপিছু 15 টাকা চাঁদা বৃদ্ধি পেল। ঐ সমিতিতে কতজন সদস্য ছিলেন ?

সমাধান : মনে করি, সমিতির সদস্য সংখ্যা x এবং জনপ্রতি দেয় চাঁদার পরিমাণ q টাকা। তাহলে.

মোট চাঁদা, $A = qx$ টাকা

প্রকৃতপক্ষে সদস্য সংখ্যা ছিল $(x-5)$ জন এবং চাঁদা হলো $(q+15)$ টাকা।

তাহলে, মোট চাঁদা হলো $(x-5)(q+15)$

প্রশ্নানুসারে, $qx = (x-5)(q+15)$..........(i)

এবং $qx = 45{,}000$..........(ii)

সমীকরণ (i) থেকে পাই,

$qx = (x-5)(q+15)$

বা, $qx = qx - 5q + 15x - 75$

বা, $5q = 15x - 75 = 5(3x-15)$

$\therefore$ $q = 3x - 15$...........(iii)

সমীকরণ (ii) এ q এর মান বসিয়ে পাই,

$(3x-15) \times x = 45000$

বা, $3x^2 - 15x = 45000$

বা, $x^2 - 5x = 15000$ [উভয়পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x^2 - 5x - 15000 = 0$

বা, $x^2 - 125x + 120x - 15000 = 0$

বা, $x(x-125) + 120(x-125) = 0$

বা, $(x-125)(x+120) = 0$

সুতরাং, $(x-125)=0$ অথবা $(x+120)=0$

বা, $x=125$ বা, $x=-120$

যেহেতু সদস্য সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই x এর মান -120 গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore\ x=125$

সুতরাং, সমিতির সদস্য সংখ্যা 125।

উদাহরণ ২। রফিক একটি কাজ 10 দিনে করতে পারে। শফিক ঐ কাজ 15 দিনে করতে পারে। তারা একত্রে কত দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে ?

সমাধান : মনে করি, তারা একত্রে d দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে।

নাম	কাজ সম্পন্ন করার দিন	১ দিনে সম্পন্ন কাজ	d দিনে সম্পন্ন কাজ
রফিক	10	$\frac{1}{10}$	$\frac{d}{10}$
শফিক	15	$\frac{1}{15}$	$\frac{d}{15}$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{d}{10}+\frac{d}{15}=1$

বা, $d\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)=1$

বা, $d\left(\frac{3+2}{30}\right)=1$

বা, $\frac{5d}{30}=1$

বা, $d=\frac{30}{5}=6$

সুতরাং, তারা একত্রে 6 দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে।

উদাহরণ ৩। একজন মাঝি স্রোতের প্রতিকূলে t_1 ঘণ্টায় x কি.মি. যেতে পারে। স্রোতের অনুকূলে ঐ পথ যেতে তার t_2 ঘণ্টা লাগে। স্রোতের বেগ ও নৌকার বেগ কত ?

সমাধান : ধরি, স্রোতের বেগ ঘণ্টায় v কি.মি. এবং স্থির পানিতে নৌকার বেগ ঘণ্টায় u কি.মি.।

তাহলে, স্রোতের অনুকূলে নৌকার কার্যকরী বেগ ঘণ্টায় $(u+v)$ কি.মি. এবং স্রোতের প্রতিকূলে নৌকার কার্যকরী বেগ ঘণ্টায় $(u-v)$ কি.মি.।

প্রশ্নানুসারে, $u+v=\frac{x}{t_2}$.......(i) [যেহেতু, বেগ = $\frac{\text{অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{\text{সময়}}$]

এবং $u-v=\frac{x}{t_1}$.......(ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$2u=\frac{x}{t_1}+\frac{x}{t_2}=x\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$$

বা, $u=\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$

সমীকরণ (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$$2v=x\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right)$$

বা, $v=\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right)$

সুতরাং, স্রোতের বেগ ঘণ্টায় $\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right)$ কি.মি.

এবং নৌকার বেগ ঘণ্টায় $\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$ কি.মি.।

উদাহরণ ৪। একটি নল 12 মিনিটে একটি খালি চৌবাচ্চা পূর্ণ করতে পারে। অপর একটি নল প্রতি মিনিটে 14 লিটার পানি বের করে দেয়। চৌবাচ্চাটি খালি থাকা অবস্থায় দুইটি নল একসঙ্গে খুলে দেওয়া হয় এবং চৌবাচ্চাটি 96 মিনিটে পূর্ণ হয়। চৌবাচ্চাটিতে কত লিটার পানি ধরে ?

সমাধান : মনে করি, প্রথম নল দ্বারা প্রতি মিনিটে x লিটার পানি প্রবেশ করে এবং চৌবাচ্চাটিতে মোট y লিটার পানি ধরে।

প্রশ্নানুসারে, প্রথম নল দ্বারা 12 মিনিটে খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়

$$\therefore\quad y=12x\,.......(i)$$

আবার, দুইটি নল দ্বারা 96 মিনিটে খালি চৌবাচ্চা পূর্ণ হয়

$$\therefore\quad y=96x-96\times14\,.........(ii)$$

সমীকরণ (i) থেকে পাই, $x=\frac{y}{12}$

x এর মান সমীকরণ (ii) এ বসিয়ে পাই,

$$y=96\times\frac{y}{12}-96\times14$$

বা, $y=8y-96\times14$ বা, $7y=96\times14$

বা, $y=\frac{96\times14}{7}=192$

সুতরাং, চৌবাচ্চাটিতে মোট 192 লিটার পানি ধরে।

কাজ :

১। বনভোজনে যাওয়ার জন্য একটি বাস 2400 টাকায় ভাড়া করা হলো এবং সিদ্ধান্ত গৃহীত হলো যে, প্রত্যেক যাত্রী সমান ভাড়া দিবে। 10 জন যাত্রী অনুপস্থিত থাকায় মাথাপিছু ভাড়া 8 টাকা বৃদ্ধি পেল। বাসে কতজন যাত্রী গিয়েছিল এবং প্রত্যেকে কত টাকা করে ভাড়া দিয়েছিল ?

২। ক ও খ একত্রে একটি কাজ p দিনে করতে পারে। ক একা কাজটি q দিনে করতে পারে। খ একাকী কত দিনে ঐ কাজটি করতে পারবে ?

৩। এক ব্যক্তি স্রোতের প্রতিকূলে দাঁড় বেয়ে ঘণ্টায় 2 কি.মি. বেগে যেতে পারে। স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 3 কি.মি. হলে, স্রোতের অনুকূলে 32 কি.মি. যেতে তার কত সময় লাগবে ?

উদাহরণ ৫। একটি বইয়ের মূল্য 24·00 টাকা। এই মূল্য প্রকৃত মূল্যের 80%। বাকি মূল্য সরকার ভর্তুকি দিয়ে থাকেন। সরকার প্রতি বইয়ে কত টাকা ভর্তুকি দেন ?

সমাধান : বাজার মূল্য = প্রকৃত মূল্যের 80%

আমরা জানি, $p=br$

এখানে, $p=24$ টাকা এবং $r=80\%=\frac{80}{100}$

$\therefore\ 24=b\times\frac{80}{100}$

বা, $b=\frac{\overset{6}{\cancel{24}}\times\overset{5}{\cancel{100}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{4}}}{\cancel{80}}}$ $\quad\therefore\ b=30$ টাকা

সুতরাং বইয়ের প্রকৃত মূল্য 30 টাকা।

$\therefore$ ভর্তুকি = $(30-24)$ টাকা

= 6 টাকা

সুতরাং প্রতি বইয়ে সরকার ভর্তুকি দেন 6 টাকা।

উদাহরণ ৬। টাকায় n সংখ্যক কমলা বিক্রয় করায় $r\%$ ক্ষতি হয়। $s\%$ লাভ করতে হলে, টাকায় কয়টি কমলা বিক্রয় করতে হবে ?

সমাধান : ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে, $r\%$ ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য $(100-r)$ টাকা।

তাহলে, যখন বিক্রয়মূল্য $(100-r)$ টাকা, তখন ক্রয়মূল্য 100 টাকা

$\therefore$ যখন বিক্রয়মূল্য 1 টাকা, তখন ক্রয়মূল্য $\frac{100}{100-r}$ টাকা।

আবার, ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে, $s\%$ লাভে বিক্রয়মূল্য $(100+s)$ টাকা।

$\therefore$ ক্রয়মূল্য $\frac{100}{100-r}$ টাকা হলে, $s\%$ লাভে বিক্রয়মূল্য $\left(\frac{100+s}{100}\times\frac{100}{100-r}\right)$ টাকা

$= \frac{100+s}{100-r}$ টাকা।

সুতরাং, $\frac{100+s}{100-r}$ টাকায় বিক্রয় করতে হবে n সংখ্যক কমলা

$\therefore$ 1 টাকায় বিক্রয় করতে হবে $n\times\left(\frac{100-r}{100+s}\right)$ সংখ্যক কমলা

সুতরাং, টাকায় $\frac{n(100-r)}{100+s}$ সংখ্যক কমলা বিক্রয় করতে হবে।

উদাহরণ ৭। শতকরা বার্ষিক 7 টাকা হার মুনাফায় 650 টাকার 6 বছরের মুনাফা কত ?

সমাধান : আমরা জানি, $I = Pnr$.

এখানে, $P = 650$ টাকা, $n = 6$ বছর, $s = 7$ টাকা

$\therefore \quad r = \frac{s}{100} = \frac{7}{100}$

$\therefore \quad I = 650\times 6\times\frac{7}{100} = 273$

সুতরাং, মুনাফা 273 টাকা।

উদাহরণ ৮। বার্ষিক শতকরা 6 টাকা হার চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় 15000 টাকার 3 বছরের সবৃদ্ধিমূল ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফা নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, $C = P(1+r)^n$ [যেখানে C চক্রবৃদ্ধির ক্ষেত্রে সবৃদ্ধিমূল]

দেওয়া আছে, $P = 15000$ টাকা, $r = 6\% = \frac{6}{100}$, $n = 3$ বছর

$\therefore\ C = 15000\left(1+\frac{6}{100}\right)^3 = 15000\left(1+\frac{3}{50}\right)^3$

$= 15000\left(\frac{53}{50}\right)^3$

$= 15000\times\frac{53}{50}\times\frac{53}{50}\times\frac{53}{50}$

$$= \frac{\overset{3}{\cancel{15}} \times 53 \times 53 \times 53}{\cancel{125}_{25}} = \frac{3 \times 148877}{25}$$

$$= \frac{446631}{25} = 17865 \cdot 24$$

$\therefore$ সবৃদ্ধিমূল = $17865 \cdot 24$ টাকা

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা = $(17865 \cdot 24 - 15000)$ টাকা

= $2865 \cdot 24$ টাকা।

কাজ : ১। টাকায় 10 টি লেবু বিক্রয় করায় $n\%$ ক্ষতি হয়। $z\%$ লাভ করতে হলে, টাকায় কয়টি লেবু বিক্রয় করতে হবে ?

২। বার্ষিক শতকরা $6\frac{1}{2}$ হার সরল মুনাফায় 750 টাকার 4 বছরের সবৃদ্ধিমূল কত টাকা হবে ?

৩। বার্ষিক 4 টাকা হার চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় 2000 টাকার 3 বছরের সবৃদ্ধিমূল নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ৩·৫

১। $x^2 - 7x + 6$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ নিচের কোনটি ?

(ক) $(x-2)(x-3)$ (খ) $(x-1)(x+8)$

(গ) $(x-1)(x-6)$ (ঘ) $(x+1)(x+6)$

২। $f(x) = x^2 - 4x + 4$ হলে, $f(2)$ এর মান নিচের কোনটি ?

(ক) 4 (খ) 2

(গ) 1 (ঘ) 0

৩। $x + y = x - y$ হলে, y এর মান নিচের কোনটি ?

(ক) -1 (খ) 0

(গ) 1 (ঘ) 2

৪। $\frac{x^2 + 3x^3}{x + 3x^2}$ এর লঘিষ্ঠ রূপ নিচের কোনটি ?

(ক) x^2 (খ) x

(গ) 1 (ঘ) 0

৫। $\dfrac{1-x^2}{1-x}$ এর লঘিষ্ঠ রূপ নিচের কোনটি ?

(ক) 1 (খ) x

(গ) $(1-x)$ (ঘ) $(1+x)$

৬। $\dfrac{1}{2}\{(a+b)^2-(a-b)^2\}$ এর মান নিচের কোনটি ?

(ক) $2(a^2+b^2)$ (খ) a^2+b^2

(গ) $2ab$ (ঘ) $4ab$

৭। $x+\dfrac{2}{x}=3$ হলে, $x^3+\dfrac{8}{x^3}$ এর মান কত ?

(ক) 1 (খ) 8

(গ) 9 (ঘ) 16

৮। p^4+p^2+1 এর উৎপাদকে বিশ্লেষায়িত রূপ নিচের কোনটি ?

(ক) $(p^2-p+1)(p^2+p-1)$ (খ) $(p^2-p-1)(p^2+p+1)$

(গ) $(p^2+p+1)(p^2+p+1)$ (ঘ) $(p^2+p+1)(p^2-p+1)$

৯। x^2-5x+4 এর উৎপাদকে বিশ্লেষিতরূপ নিচের কোনটি ?

(ক) $(x-1)(x-4)$ (খ) $(x+1)(x-4)$

(গ) $(x+2)(x-2)$ (ঘ) $(x-5)(x-1)$

১০। $(x-7)(x-5)$ নিচের কোনটির সমান ?

(ক) $x^2+12x+35$ (খ) $x^2+12x-35$

(গ) $x^2-12x+35$ (ঘ) $x^2-12x-35$

১১। $\dfrac{2\cdot9\times2\cdot9-1\cdot1\times1\cdot1}{2\cdot9-1\cdot1}$ এর মান কত ?

(ক) $1\cdot8$ (খ) $1\cdot9$

(গ) 2 (ঘ) 4

১২। যদি $x=2-\sqrt{3}$ হয়, তবে x^2 এর মান কত ?

(ক) 1 (খ) $7-4\sqrt{3}$

(গ) $2+\sqrt{3}$ (ঘ) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

১৩। $f(x)=x^2-5x+6$ এবং $f(x)=0$ হলে, $x=$ কত ?

(ক) $2, 3$ (খ) $-5, 1$

(গ) $-2, 3$ (ঘ) $1, -5$

১৪।

	x	$+6$
x	x^2	$+6x$
-5	$-5x$	-30

উপরের চিত্রের সর্বমোট ক্ষেত্রফল নিচের কোনটি ?

(ক) $x^2-5x+30$ (খ) x^2+x-30

(গ) $x^2+6x-30$ (ঘ) x^2-x+30

১৫। ক যে কাজ x দিনে সম্পন্ন করতে পারে, খ সে কাজ $3x$ দিনে সম্পন্ন করতে পারে। একই সময়ে ক, খ এর কত গুণ কাজ করে ?

(ক) 2 গুণ (খ) $2\frac{1}{2}$ গুণ

(গ) 3 গুণ (ঘ) 4 গুণ

১৬। $a+b=-c$ হলে, $a^2+2ab+b^2$ কে c এর মাধ্যমে প্রকাশ করলে নিচের কোনটি পাওয়া যাবে ?

(ক) $-c^2$ (খ) c^2

(গ) bc (ঘ) ca

১৭। $x+y=3, xy=2$ হলে, x^3+y^3 এর মান কত ?

(ক) 9 (খ) 18

(গ) 19 (ঘ) 27

১৮। $8x^3+27y^3$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ কোনটি ?

(ক) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$ (খ) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

(গ) $(2x-3y)(4x^2-9y^2)$ (ঘ) $(2x+3y)(4x^2+9y^2)$

১৯। $9x^2+16y^2$ এর সাথে কত যোগ করলে যোগফল পূর্ণবর্গ রাশি হবে ?

(ক) $6xy$ (খ) $12xy$

(গ) $24xy$ (ঘ) $144xy$

২০। $x-y=4$ হলে, নিচের কোন উক্তি সঠিক ?

(ক) $x^3-y^3-4xy=64$ (খ) $x^3-y^3-12xy=12$

(গ) $x^3-y^3-3xy=64$ (ঘ) $x^3-y^3-12xy=64$

২১। যদি $x^4-x^2+1=0$ হয়, তবে

(১) $x^2+\frac{1}{x^2}$ = কত ?

(ক) 4 (খ) 2

(গ) 1 (ঘ) 0

(২) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ এর মান কত ?

(ক) 4 (খ) 3

(গ) 2 (ঘ) 1

(৩) $x^3+\frac{1}{x^3}$ = কত ?

(ক) 3 (খ) 2

(গ) 1 (ঘ) 0

২২। ক একটি কাজ p দিনে করে এবং খ $2p$ দিনে করে। তারা একটি কাজ আরম্ভ করে এবং কয়েকদিন পর ক কাজটি অসমাপ্ত রেখে চলে গেল। বাকি কাজটুকু খ r দিনে শেষ করে। কাজটি কত দিনে শেষ হয়েছিল ?

২৩। দৈনিক 8 ঘণ্টা পরিশ্রম করে 50 জন লোক একটি কাজ 12 দিনে করতে পারে। দৈনিক কত ঘণ্টা পরিশ্রম করে 60 জনে 16 দিনে ঐ কাজটি করতে পারবে ?

২৪। মিতা একটি কাজ x দিনে করতে পারে। রিতা সে কাজ y দিনে করতে পারে। তারা একত্রে কত দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে ?

২৫। বনভোজনে যাওয়ার জন্য 5700 টাকায় একটি বাস ভাড়া করা হলো এবং শর্ত হলো যে, প্রত্যেক যাত্রী সমান ভাড়া বহন করবে। 5 জন যাত্রী না যাওয়ায় মাথাপিছু ভাড়া 3 টাকা বৃদ্ধি পেল। বাসে কতজন যাত্রী গিয়েছিল?

২৬। একজন মাঝি স্রোতের প্রতিকূলে p ঘণ্টায় d কি.মি. যেতে পারে। স্রোতের অনুকূলে ঐ পথ যেতে তার q ঘণ্টা লাগে। স্রোতের বেগ ও নৌকার বেগ কত ?

২৭। একজন মাঝির দাঁড় বেয়ে 15 কি.মি. যেতে এবং সেখান থেকে ফিরে আসতে 4 ঘণ্টা সময় লাগে। সে স্রোতের অনুকূলে যতক্ষণে 5 কি.মি. যায়, স্রোতের প্রতিকূলে ততক্ষণে 3 কি.মি. যায়। দাঁড়ের বেগ ও স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

২৮। একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল সংযুক্ত আছে। প্রথম নল দ্বারা চৌবাচ্চাটি t_1 মিনিটে পূর্ণ হয় এবং দ্বিতীয় নল দ্বারা t_2 মিনিটে খালি হয়। নল দুইটি একত্রে খুলে দিলে খালি চৌবাচ্চাটি কতক্ষণে পূর্ণ হবে ?
(এখানে $t_2 > t_1$)

২৯। একটি নল দ্বারা 12 মিনিটে একটি চৌবাচ্চা পূর্ণ হয়। অপর একটি নল দ্বারা 1 মিনিটে তা থেকে 15 লিটার পানি বের করে দেয়। চৌবাচ্চাটি খালি থাকা অবস্থায় দুইটি নল একসঙ্গে খুলে দেওয়া হয় এবং চৌবাচ্চাটি 48 মিনিটে পূর্ণ হয়। চৌবাচ্চাটিতে কত লিটার পানি ধরে ?

৩০। একটি কলম 11 টাকায় বিক্রয় করলে 10% লাভ হয়। কলমটির ক্রয়মূল্য কত ?

৩১। একটি খাতা 36 টাকায় বিক্রয় করায় যত ক্ষতি হলো, 72 টাকায় বিক্রয় করলে তার দ্বিগুণ লাভ হতো, খাতাটির ক্রয়মূল্য কত ?

৩২। ক, খ ও গ এর মধ্যে 260 টাকা এরূপে ভাগ করে দাও যেন ক এর অংশের 2 গুণ, খ এর অংশের 3 গুণ এবং গ এর অংশের 4 গুণ পরস্পর সমান হয়।

৩৩। একটি দ্রব্য $x\%$ ক্ষতিতে বিক্রয় করলে যে মূল্য পাওয়া যায়, $3x\%$ লাভে বিক্রয় করলে তার চেয়ে $18x$ টাকা বেশি পাওয়া যায়। দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত ছিল ?

৩৪। মুনাফার একই হারে 300 টাকার 4 বছরের সরল মুনাফা ও 400 টাকার 5 বছরের সরল মুনাফা একত্রে 148 টাকা হলে, শতকরা মুনাফার হার কত ?

৩৫। 4% হার মুনাফায় কোনো টাকার 2 বছরের মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য 1 টাকা হলে, মূলধন কত ?

৩৬। কোনো আসল 3 বছরে সরল মুনাফাসহ 460 টাকা এবং 5 বছরে সরল মুনাফাসহ 600 টাকা হলে, শতকরা মুনাফার হার কত ?

৩৭। শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হার সরল মুনাফায় কত টাকা 13 বছরে সবৃদ্ধিমূল 985 টাকা হবে ?

৩৮। শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হার মুনাফায় কত টাকা 12 বছরে সবৃদ্ধিমূল 1248 টাকা হবে ?

৩৯। 5% হার মুনাফায় 8000 টাকার 3 বছরের সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয় কর।

৪০। মিষ্টির উপর মূল্য সংযোজন কর $(VAT)\,x\%$। একজন বিক্রেতা ভ্যাটসহ P টাকার মিষ্টি বিক্রয় করলে তাঁকে কত ভ্যাট দিতে হবে ? $x=15,\ P=2300$ হলে, ভ্যাটের পরিমাণ কত ?

৪১। কোনো সংখ্যা ও ঐ সংখ্যার গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যার সমষ্টি ৩.

ক. সংখ্যাটিকে x চলকে প্রকাশ করে উপরের তথ্যকে একটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. $x^3-\dfrac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. প্রমাণ কর $x^5+\dfrac{1}{x^5}=123$

৪২. কোনো সমিতির সদস্যগণ প্রত্যেকেই সদস্যসংখ্যার 100 গুণ চাঁদা দেওয়ার সিদ্ধান্ত নিলেন। কিন্তু 4 জন সদস্য চাঁদা না দেওয়ায় প্রত্যেকের চাঁদার পরিমাণ পূর্বের চেয়ে 500 টাকা বেড়ে গেল।

ক. সমিতির সদস্যসংখ্যা x এবং মোট চাঁদার পরিমাণ A হলে, এদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

খ. সমিতির সদস্য সংখ্যা ও মোট চাঁদার পরিমাণ নির্ণয় কর।

গ. মোট চাঁদার $\dfrac{1}{4}$ অংশ 5% হারে এবং অবশিষ্ট টাকা 4% হারে 2 বছরের জন্য সরল মুনাফায় বিনিয়োগ করা হলো। মোট মুনাফা নির্ণয় কর।

চতুর্থ অধ্যায়

সূচক ও লগারিদম

(Exponents and Logarithms)

অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যা বা রাশিকে সূচকের সাহায্যে অতি সহজে লিখে প্রকাশ করা যায়। ফলে হিসাব গণনা ও গাণিতিক সমস্যা সমাধান সহজতর হয়। সূচকের মাধ্যমেই সংখ্যার বৈজ্ঞানিক বা আদর্শ রূপ প্রকাশ করা হয়। তাই প্রত্যেক শিক্ষার্থীর সূচকের ধারণা ও এর প্রয়োগ সম্পর্কে জ্ঞান থাকা আবশ্যক।

সূচক থেকেই লগারিদমের সৃষ্টি। আর এই লগারিদমের সাহায্যে সংখ্যা বা রাশির গুণ, ভাগ ও সূচক সম্পর্কিত গণনার কাজ সহজ হয়েছে। বর্তমানে ক্যালকুলেটর ও কম্পিউটার এর ব্যবহার প্রচলনের পূর্ব পর্যন্ত বৈজ্ঞানিক হিসেব গণনায় লগারিদমের ব্যবহার ছিল একমাত্র উপায়। তবে এখনও এগুলোর বিকল্প হিসাবে লগারিদমের ব্যবহার গুরুত্বপূর্ণ। এ অধ্যায়ে সূচক ও লগারিদম সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- মূলদ সূচক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ধনাত্মক পূর্ণ–সাংখ্যিক সূচক, শূন্য ও ঋণাত্মক পূর্ণ–সাংখ্যিক সূচক ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- সূচকের নিয়মাবলি বর্ণনা ও তা প্রয়োগ করে সমস্যার সমাধান করতে পারবে।
- nতম মূল ও মূলদ ভগ্নাংশ সূচক ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং nতম মূলকে সূচক আকারে প্রকাশ করতে পারবে।
- লগারিদম ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- লগারিদমের সূত্রাবলি প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- সাধারণ লগারিদম ও স্বাভাবিক লগারিদম ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সাধারণ লগারিদমের পূর্ণক ও অংশক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ক্যালকুলেটরের সাহায্যে সাধারণ ও স্বাভাবিক লগারিদম নির্ণয় করতে পারবে।

৪·১ সূচক (*Exponents or Indices*) :

আমরা ষষ্ঠ শ্রেণিতে সূচকের ধারণা পেয়েছি এবং সপ্তম শ্রেণিতে গুণের ও ভাগের সূচক নিয়ম সম্পর্কে জেনেছি। সূচক ও ভিত্তি সংবলিত রাশিকে সূচকীয় রাশি বলা হয়।

কাজ : খালি ঘর পূরণ কর :			
একই সংখ্যা বা রাশির ক্রমিক গুণ	সূচকীয় রাশি	ভিত্তি	ঘাত বা সূচক
$2\times2\times2$	2^3	2	3
$3\times3\times3\times3$		3	
$a\times a\times a$	a^3		
$b\times b\times b\times b\times b$			5

a যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হলে, n সংখ্যক a এর ক্রমিক গুণ, অর্থাৎ, $a\times a\times a\times .....\times a$ কে a^n আকারে লেখা হয়, যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$a\times a\times a\times .....\times a$ (n সংখ্যক a) = a^n.

এখানে, $n\rightarrow$ সূচক বা ঘাত
$a\rightarrow$ ভিত্তি

আবার, বিপরীতক্রমে $a^n = a\times a\times a\times ....\times a$ (n সংখ্যক a)

সূচক শুধু ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাই নয়, ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা ধনাত্মক ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক ভগ্নাংশও হতে পারে। অর্থাৎ, ভিত্তি $a\in R$ (বাস্তব সংখ্যার সেট) এবং সূচক $n\in Q$ (মূলদ সংখ্যার সেট) এর জন্য a^n সংজ্ঞায়িত। তবে বিশেষ ক্ষেত্রে, $n\in N$ (স্বাভাবিক সংখ্যার সেট) ধরা হয়। তাছাড়া অমূলদ সূচকও হতে পারে। তবে তা মাধ্যমিক স্তরের পাঠ্যসূচি বহির্ভূত বলে এখানে সে সম্পর্কে আলোচনা করা হয় নি।

৪·২ সূচকের সূত্রাবলি

ধরি, $a\in R; m,n\in N.$

সূত্র ১। $a^m\times a^n = a^{m+n}$

সূত্র ২। $\dfrac{a^m}{a^n}=\begin{cases} a^{m-n} & \text{যখন } m>n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{যখন } n>m \end{cases}$

নিচের ছকের খালি ঘর পূরণ কর :

a^m, a^n, $a\neq 0$	$m>n$	$n>m$
	$m=5,\ n=3$	$m=3,\ n=5$
$a^m\times a^n$	$a^5\times a^3=(a\times a\times a\times a\times a)\times(a\times a\times a)$ $=a\times a\times a\times a\times a\times a\times a\times a$ $=a^8=a^{5+3}$	$a^3\times a^5=$
$\dfrac{a^m}{a^n}$	$\dfrac{a^5}{a^3}=$	$\dfrac{a^3}{a^5}=\dfrac{a\times a\times a}{a\times a\times a\times a\times a}$ $=\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{a^{5-3}}$

$\therefore\ a^m\times a^n = a^{m+n}$

এবং $\dfrac{a^m}{a^n}=\begin{cases} a^{m-n} & \text{যখন } m>n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{যখন } n>m \end{cases}$

সূত্র ৩। $(ab)^n = a^n \times b^n$

লক্ষ করি, $(5\times 2)^3 = (5\times 2)\times(5\times 2)\times(5\times 2)$ [$\because a^3 = a\times a\times a$; $a = 5\times 2$]

$= 5\times 2\times 5\times 2\times 5\times 2$

$= (5\times 5\times 5)\times(2\times 2\times 2)$

$= 5^3\times 2^3$

সাধারণভাবে, $(ab)^n = ab\times ab\times ab\times ....\times ab$ [n সংখ্যক ab এর ক্রমিক গুণ]

$= (a\times a\times a\times ....\times a)\times(b\times b\times b\times ....\times b)$

$= a^n b^n$

সূত্র ৪। $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, (b \neq 0)$

লক্ষ করি, $\left(\dfrac{5}{2}\right)^3 = \dfrac{5}{2}\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{5}{2} = \dfrac{5\times 5\times 5}{2\times 2\times 2} = \dfrac{5^3}{2^3}$

সাধারণভাবে, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a}{b}\times\dfrac{a}{b}\times\dfrac{a}{b}\times ....\times\dfrac{a}{b}$ [n সংখ্যক $\dfrac{a}{b}$ এর ক্রমিক গুণ]

$= \dfrac{a\times a\times a\times ......\times a}{b\times b\times b\times ......\times b} = \dfrac{a^n}{b^n}$

সূত্র–১ সূচক বিধি (Index law) নামে পরিচিত। এই সূত্রটির প্রয়োগ ক্ষেত্র সকল পূর্ণ সংখ্যা সম্প্রসারণের লক্ষ্যে a^0 এবং a^{-n} (যেখানে n স্বাভাবিক সংখ্যা) এর সংজ্ঞা দেওয়া প্রয়োজন।

সংজ্ঞা : $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $(a \neq 0, n \in N)$

এর ফলে সূচক বিধি m এবং n এর সকল পূর্ণসাংখ্যিক মানের জন্য বলবৎ থাকে এবং এরূপ সকল সূচকের জন্য $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ খাটে।

মন্তব্য : $\dfrac{1}{a^n} = \dfrac{a^o}{a^n} = a^{o-n} = a^{-n}$

সূত্র ৫। $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

$\left(a^m\right)^n = a^m\times a^m\times a^m\times ....\times a^m$ [n সংখ্যক a^m এর ক্রমিক গুণ]

$= a^{m+m+m+.........+m}$ [ঘাতে n সংখ্যক সূচকের যোগফল]

$= a^{n\times m} = a^{mn}$

$\therefore$ $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

উদাহরণ ১। মান নির্ণয় কর : (ক) $\frac{5^2}{5^3}$ (খ) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$

সমাধান : (ক) $\frac{5^2}{5^3} = 5^{2-3} = 5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$

(খ) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^o = 1.$

উদাহরণ ২। সরল কর : (ক) $\frac{5^4 \times 8 \times 16}{2^5 \times 125}$ (খ) $\frac{3 \cdot 2^n - 4 \cdot 2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}}$

সমাধান : (ক) $\frac{5^4 \times 8 \times 16}{2^5 \times 125} = \frac{5^4 \times 2^3 \times 2^4}{2^5 \times 5^3} = \frac{5^4 \times 2^{3+4}}{5^3 \times 2^5} = \frac{5^4}{5^3} \times \frac{2^7}{2^5} = 5^{4-3} \times 2^{7-5}$

$= 5^1 \times 2^2 = 5 \times 4 = 20$

(খ) $\frac{3 \cdot 2^n - 4 \cdot 2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}} = \frac{3 \cdot 2^n - 2^2 \cdot 2^{n-2}}{2^n - 2^n \cdot 2^{-1}} = \frac{3 \cdot 2^n - 2^{2+n-2}}{2^n - 2^n \cdot \frac{1}{2}}$

$= \frac{3 \cdot 2^n - 2^n}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 2^n} = \frac{(3-1) \cdot 2^n}{\frac{1}{2} \cdot 2^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{\frac{1}{2} \cdot 2^n} = 2 \cdot 2 = 4.$

উদাহরণ ৩। দেখাও যে, $(a^p)^{q-r} \cdot (a^q)^{r-p} (a^r)^{p-q} = 1$

সমাধান : $(a^p)^{q-r} \cdot (a^q)^{r-p} \cdot (a^r)^{p-q}$

$= a^{p(q-r)} . a^{q(r-p)} . a^{r(p-q)}, [\because (a^m)^n = a^{mn}]$

$= a^{pq-pr} \cdot a^{qr-pq} \cdot a^{pr-qr}$

$= a^{pq-pr+qr-pq+pr-qr}$

$= a^0 = 1.$

কাজ : খালি ঘর পূরণ কর :

(*i*) $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{\square}$ (*ii*) $5^{\square} \times 5^3 = 5^5$ (*iii*) $a^2 \times a^{\square} = a^{-3}$ (*iv*) $\frac{4}{4^{\square}} = 1$ (*v*) $(-5)^0 = \square$

৪·৩ nতম মূল

লক্ষ করি, $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2$

আবার, $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 5^{2 \times \frac{1}{2}} = 5$

$\therefore \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5$

$5^{\frac{1}{2}}$ এর বর্গ (দ্বিতীয় ঘাত) $= 5$ এবং 5 এর বর্গমূল (দ্বিতীয় মূল) $= 5^{\frac{1}{2}}$

$5^{\frac{1}{2}}$ কে বর্গমূলের চিহ্ন $\sqrt{\ }$ এর মাধ্যমে $\sqrt{5}$ আকারে লেখা হয়।

আবার, লক্ষ করি, $5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3$

আবার, $5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 5^{3\times\frac{1}{3}} = 5$

$\therefore \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 5.$

$5^{\frac{1}{3}}$ এর ঘন (তৃতীয় ঘাত) $= 5$ এবং 5 এর ঘনমূল (তৃতীয় মূল) $= 5^{\frac{1}{3}}$

$5^{\frac{1}{3}}$ কে ঘনমূলের চিহ্ন $\sqrt[3]{\ }$ এর মাধ্যমে $\sqrt[3]{5}$ আকারে লেখা হয়।

n তম মূলের ক্ষেত্রে,

$a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots\ldots. \times a^{\frac{1}{n}}$ [n সংখ্যক $a^{\frac{1}{n}}$ এর ক্রমিক গুণ]

$= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n.$

আবার, $a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots\ldots. \times a^{\frac{1}{n}}$

$= a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}}$ [সূচকে n সংখ্যক $\frac{1}{n}$ এর যোগ]

$= a^{n\times\frac{1}{n}} = a$

$\therefore \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a.$

$a^{\frac{1}{n}}$ এর n তম ঘাত $= a$ এবং a এর n তম মূল $= a^{\frac{1}{n}}$

অর্থাৎ, $a^{\frac{1}{n}}$ এর n তম ঘাত $= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$ এবং a এর n তম মূল $(a)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ । a এর n তম মূলকে $\sqrt[n]{a}$ আকারে লেখা হয়।

উদাহরণ ৪। সরল কর : (ক) $7^{\frac{3}{4}}\cdot 7^{\frac{1}{2}}$ (খ) $(16)^{\frac{3}{4}}\div(16)^{\frac{1}{2}}$ (গ) $\left(10^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$

সমাধান : (ক) $7^{\frac{3}{4}}\cdot 7^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = 7^{\frac{5}{4}}$

(খ) $(16)^{\frac{3}{4}}\div(16)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{(16)^{\frac{3}{4}}}{(16)^{\frac{1}{2}}} = (16)^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = (16)^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2.$

(গ) $\left(10^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 10^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}.$

উদাহরণ ৫। সরল কর : (ক) $(12)^{-\frac{1}{2}}\times\sqrt[3]{54}$ (খ) $(-3)^3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

সমাধান : (ক) $(12)^{-\frac{1}{2}}\times\sqrt[3]{54} = \dfrac{1}{(12)^{\frac{1}{2}}}\times(54)^{\frac{1}{3}}$

$$= \frac{1}{(2^2\times 3)^{\frac{1}{2}}}\times(3^3\times 2)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{(2^2)^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{2}}}\times(3^3)^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{2\cdot 3^{\frac{1}{2}}}\times 3\cdot 2^{\frac{1}{3}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^1}\times\frac{3^1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{1-\frac{1}{2}}}{2^{1-\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}.$$

(খ) $(-3)^3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

$= (-3)(-3)(-3)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= -27\times\frac{1}{4}$

$= -\frac{27}{4}$

> **কাজ :** সরল কর : (*i*) $\dfrac{2^4\cdot 2^2}{32}$ (*ii*) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{5}{2}}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{5}{2}}$ (*iii*) $8^{\frac{3}{4}}\div 8^{\frac{1}{2}}$

লক্ষণীয় :

1. $a>0, a\neq 1$ শর্তে $a^x = a^y$ হলে, $x=y$
2. $a>0, b>0, x\neq 0$ শর্তে $a^x = b^x$ হলে, $a=b$

উদাহরণ ৬। সমাধান কর : $4^{x+1} = 32$

সমাধান : $4^{x+1} = 32$

বা $(2^2)^{x+1} = 32$, বা $2^{2x+2} = 2^5$

$\therefore 2x+2 = 5$, [$a^x = a^y$ হলে, $x = y$]

বা $2x = 5-2$, বা $2x = 3$

$\therefore x = \frac{3}{2}$

অনুশীলনী ৪·১

সরল কর (১ – ১০) :

১। $\frac{3^3 \cdot 3^5}{3^6}$ ২। $\frac{5^3 \cdot 8}{2^4 \cdot 125}$ ৩। $\frac{7^3 \times 7^{-3}}{3 \times 3^{-4}}$ ৪। $\frac{\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}$ ৫। $(2^{-1}+5^{-1})^{-1}$

৬। $(2a^{-1}+3b^{-1})^{-1}$ ৭। $\left(\frac{a^2b^{-1}}{a^{-2}b}\right)^2$ ৮। $\sqrt{x^{-1}y} \cdot \sqrt{y^{-1}z} \cdot \sqrt{z^{-1}x}, (x>0, y>0, z>0)$

৯। $\frac{2^{n+4} - 4 \cdot 2^{n+1}}{2^{n+2} \div 2}$ ১০। $\frac{3^{m+1}}{(2^m)^{m-1}} \div \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$

প্রমাণ কর (১১ – ১৮) :

১১। $\frac{4^n - 1}{2^n - 1} = 2^n + 1$ ১২। $\frac{2^{p+1}.3^{2p-q}.5^{p+q}.6^q}{6^q.10^{q+2}.15^p} = \frac{1}{50}$

১৩। $\left(\frac{a^\ell}{a^m}\right)^n \cdot \left(\frac{a^m}{a^n}\right)^\ell \cdot \left(\frac{a^n}{a^\ell}\right)^m = 1$ ১৪। $\frac{a^{p+q}}{a^{2r}} \times \frac{a^{q+r}}{a^{2p}} \times \frac{a^{r+p}}{a^{2q}} = 1$

১৫। $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}} = 1$ ১৬। $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} = 1$

১৭। $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r} \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p} \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q} = 1$

১৮। যদি $a^x = b$, $b^y = c$ এবং $c^z = a$ হয়, তবে দেখাও যে, $xyz = 1$

সমাধান কর (১৯ – ২২) :

১৯। $4^x = 8$ ২০। $2^{2x+1} = 128$ 2১। $(\sqrt{3})^{x+1} = (\sqrt[3]{3})^{2x-1}$ ২২। $2^x + 2^{1-x} = 3$

৪.৪ লগারিদম *(Logarithm)*

সূচকীয় রাশির মান বের করতে লগারিদম ব্যবহার করা হয়। লগারিদমকে সংক্ষেপে লগ (*Log*) লেখা হয়। বড় বড় সংখ্যা বা রাশির গুণফল, ভাগফল ইত্যাদি log এর সাহায্যে সহজে নির্ণয় করা যায়।

আমরা জানি, $2^3=8$; এই গাণিতিক উক্তিটিকে লগের মাধ্যমে লেখা হয় $\log_2 8=3$. আবার, বিপরীতক্রমে, $\log_2 8=3$ হলে, সূচকের মাধ্যমে লেখা যাবে $2^3=8$; অর্থাৎ, $2^3=8$ হলে $\log_2 8=3$ এবং বিপরীতক্রমে, $\log_2 8=3$ হলে $2^3=8$. একইভাবে, $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$ কে লগের মাধ্যমে লেখা যায়, $\log_2 \frac{1}{8}=-3$.

$a^x=N,(a>0,a\neq 1)$ হলে, $x=\log_a N$ কে
N এর a ভিত্তিক লগ বলা হয়।

লক্ষণীয় : x ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাই হোক না কেন, a^x সর্বদা ধনাত্মক। তাই শুধু ধনাত্মক সংখ্যারই লগের মান আছে যা বাস্তব। শূন্য বা ঋণাত্মক সংখ্যার লগের বাস্তব মান নেই।

কাজ ১ : লগের মাধ্যমে প্রকাশ কর :		**কাজ ২** : ফাঁকা জায়গা পূরণ কর :	
$(i)\ 10^2=100$		সূচকের মাধ্যমে	লগের মাধ্যমে
$(ii)\ 3^{-2}=\frac{1}{9}$		$10^0=1$	$\log_{10}1=0$
$(iii)\ 2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$		$e^0=.....$ $a^0=1$	$\log_e 1=......$ $......=......$
$(iv)\ \sqrt[4]{2}=4$		$10^1=10$	$\log_{10}10=1$
		$e^1=...$	$.......=.......$
		$.......=......$	$\log_a a=1$

লগারিদমের সূত্রাবলি

ধরি, $a>0,a\neq 1;b>0,b\neq 1$ এবং $M>0,N>0.$

সূত্র ১। (ক) $\log_a 1=0,(a>0,a\neq 1)$

(খ) $\log_a a=1,(a>0,a\neq 1)$

প্রমাণ (ক) সূচকের সূত্র হতে জানি, $a^0=1$

$\therefore$ লগের সংজ্ঞা হতে পাই, $\log_a 1=0$ (প্রমাণিত)

(খ) সূচকের সূত্র হতে জানি, $a^1=a$

$\therefore$ লগের সংজ্ঞা হতে পাই, $\log_a a=1$ (প্রমাণিত)।

সূত্র ২। $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$

প্রমাণ : ধরি, $\log_a M=x,\log_a N=y;$

$\therefore\ M=a^x,N=a^y$

এখন, $MN = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$\therefore \log_a(MN) = x + y$, বা $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$ [x, y এর মান বসিয়ে]

$\therefore\ \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N.$ (প্রমাণিত)

দ্রষ্টব্য–১। $\log_a(MNP.....) = \log_a M + \log_a N + \log_a P + ...$

দ্রষ্টব্য–২। $\log_a(M \pm N) \neq \log_a M \pm \log_a N$

সূত্র ৩। $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

প্রমাণ : ধরি, $\log_a M = x, \log_a N = y$;

$\therefore\ M = a^x, N = a^y$

এখন, $\dfrac{M}{N} = \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$\therefore\ \log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) = x - y$

$\therefore\ \log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$ (প্রমাণিত)।

সূত্র ৪। $\log_a M^r = r \log_a M.$

প্রমাণ : ধরি, $\log_a M = x$; $\therefore M = a^x$

বা $(M)^r = (a^x)^r$; বা $M^r = a^{rx}$

$\therefore\ \log_a M^r = rx$; বা $\log_a M^r = r \log_a M$

$\therefore\ \log_a M^r = r \log_a M.$ (প্রমাণিত)

দ্রষ্টব্য : $(\log_a M)^r \neq r \log_a M$

সূত্র ৫। $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$, (ভিত্তি পরিবর্তন)

প্রমাণ : ধরি, $\log_a M = x$, $\log_b M = y$

$\therefore\ a^x = M, b^y = M$

$\therefore\ a^x = b^y$, বা $(a^x)^{\frac{1}{y}} = (b^y)^{\frac{1}{y}}$

বা $b = a^{\frac{x}{y}}$

$\therefore \dfrac{x}{y} = \log_a b$

বা, $x = y \log_a b$, বা $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$ (প্রমাণিত)

অনুসিদ্ধান্ত : $log_a b = \dfrac{1}{log_b a}$, অথবা $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

প্রমাণ : আমরা জানি, $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$ [সূত্র ৫]

$M = a$ বসিয়ে পাই, $\log_a a = \log_b a \times \log_a b$

বা, $1 = log_b a \times log_a b$; $\therefore log_b a = \dfrac{1}{log_a b}$, অথবা $log_a b = \dfrac{1}{log_b a}$ (প্রমাণিত)।

বা, $1 = \log_b a \times \log_a b$; $\therefore \log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$, অথবা $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ ৭। মান নির্ণয় কর : (ক) $\log_{10} 100$ (খ) $\log_3\left(\dfrac{1}{9}\right)$ (গ) $\log_{\sqrt{3}} 81$

সমাধান :

(ক) $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2\log_{10} 10$ $[\because \log_{10} M^r = r\log_{10} M]$

$= 2 \times 1 = 2$ $[\because \log_a a = 1]$

(খ) $\log_3\left(\dfrac{1}{9}\right) = \log_3\left(\dfrac{1}{3^2}\right) = \log_3 3^{-2} = -2\log_3 3$ $[\because \log_a M^r = r\log_a M]$

$= -2 \times 1 = -2$ $[\because \log_a a = 1]$

(গ) $\log_{\sqrt{3}} 81 = \log_{\sqrt{3}} 3^4 = \log_{\sqrt{3}}\{(\sqrt{3})^2\}^4 = \log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^8$

$= 8\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3}$ $[\because \log_a M^r = r\log_a M]$

$= 8 \times 1$ $[\because \log_a a = 1]$

$= 8$

উদাহরণ ৮। (ক) $5\sqrt{5}$ এর 5 ভিত্তিক লগ কত ?

(খ) 400 এর লগ 4 ; ভিত্তি কত ?

সমাধান : (ক) $5\sqrt{5}$ এর 5 ভিত্তিক লগ

$= \log_5 5\sqrt{5} = \log_5(5 \times 5^{\frac{1}{2}}) = \log_5 5^{\frac{3}{2}}$

$\dfrac{3}{2}\log_5 5$ $[\because \log_a M^r = r\log_a M]$

$= \dfrac{3}{2} \times 1$ $[\because \log_a a = 1]$

$= \dfrac{3}{2}$

(খ) ধরি, ভিত্তি a

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $\log_a 400 = 4$

$\therefore a^4 = 400$

বা, $a^4 = (20)^2 = \{(2\sqrt{5})^2\}^2 = (2\sqrt{5})^4$

বা, $a^4 = (2\sqrt{5})^4$

$\therefore a = 2\sqrt{5}$ $\quad [\because a^x = b^x, a^x \neq 0$ হলে, $a = b]$

$\therefore$ ভিত্তি $2\sqrt{5}$

উদাহরণ ৯। x এর মান নির্ণয় কর :

(ক) $\log_{10} x = -2$ $\quad$ (খ) $\log_x 324 = 4$

সমাধান :

(ক) $\log_{10} x = -2$

$\therefore x = 10^{-2} = \frac{1}{10^2}$

বা $x = \frac{1}{100} = 0\cdot01$

$\therefore x = 0\cdot01$

(খ) $\log_x 324 = 4$

$\therefore x^4 = 324 = 3\times3\times3\times3\times2\times2$

$= 3^4 \times 2^2 = 3^4 \times (\sqrt{2})^4$

বা $x^4 = (3\sqrt{2})^4$

$\therefore x = 3\sqrt{2}.$

উদাহরণ ১০। প্রমাণ কর যে, $3\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} 40$

সমাধান : বামপক্ষ = $3\log_{10} 2 + \log_{10} 5$

$= \log_{10} 2^3 + \log_{10} 5$ $\quad [\because \log_a M^r = r\log_a M]$

$= \log_{10} 8 + \log_{10} 5$

$= \log_{10}(8\times5)$ $\quad [\because \log_n(MN) = \log_a M + \log_a N]$

$= \log_{10} 40$

$= \log_{10} 2^3 + \log_{10} 5$ $\quad [\because \log_a M^r = r\log_a M]$

$= \log_{10} 8 + \log_{10} 5$

$= \log_{10}(8\times5)$ $\quad [\because \log_n(MN) = \log_a M + \log_a N]$

$= \log_{10} 40$

= ডানপক্ষ

উদাহরণ ১১। সরল কর : $\dfrac{\log_{10}\sqrt{27} + \log_{10} 8 - \log_{10}\sqrt{1000}}{\log_{10} 1\cdot2}$

সমাধান : $\dfrac{\log_{10}\sqrt{27}+\log_{10}8-\log_{10}\sqrt{1000}}{\log_{10}1\cdot 2}$

$=\dfrac{\log_{10}(3^3)^{\frac{1}{2}}+\log_{10}2^3-\log_{10}(10^3)^{\frac{1}{2}}}{\log_{10}\frac{12}{10}}$

$=\dfrac{\log_{10}3^{\frac{3}{2}}+\log_{10}2^3-\log_{10}10^{\frac{3}{2}}}{\log_{10}12-\log_{10}10}$

$=\dfrac{\frac{3}{2}\log_{10}3+3\log_{10}2-\frac{3}{2}\log_{10}10}{\log_{10}(3\times 2^2)-\log_{10}10}$

$\dfrac{\frac{3}{2}(\log_{10}3+2\log_{10}2-1)}{(\log_{10}3+2\log_{10}2-1)}$ $[\because \log_{10}10=1]$

$=\dfrac{3}{2}.$

অনুশীলনী ৪.২

১। মান নির্ণয় কর : (ক) $\log_3 81$ (খ) $\log_5\sqrt[3]{5}$ (গ) $\log_4 2$ (ঘ) $\log_{2\sqrt{5}}400$
(ঙ) $\log_5\left(\sqrt[3]{5}.\sqrt{5}\right)$

২। x এর মান নির্ণয় কর : (ক) $\log_5 x=3$ (খ) $\log_x 25=2$ (গ) $\log_x\frac{1}{16}=-2$

৩। দেখাও যে,
(ক) $5\log_{10}5-\log_{10}25=\log_{10}125$
(খ) $\log_{10}\frac{50}{147}=\log_{10}2+2\log_{10}5-\log_{10}3-2\log_{10}7$
(গ) $3\log_{10}2+2\log_{10}3+\log_{10}5=\log_{10}360$

৪। সরল কর :
(ক) $7\log_{10}\frac{10}{9}-2\log_{10}\frac{25}{24}+3\log_{10}\frac{81}{80}$
(খ) $\log_7\left(\sqrt[5]{7}.\sqrt{7}\right)-\log_3\sqrt[3]{3}+\log_4 2$
(গ) $\log_e\frac{a^3b^3}{c^3}+\log_e\frac{b^3c^3}{d^3}+\log_e\frac{c^3d^3}{a^3}-3\log_e b^2c$

৪.৫ সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ

সূচকের সাহায্যে আমরা অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যাকে ছোট ও সহজ আকারে প্রকাশ করতে পারি। যেমন,
আলোর গতি = 300000 কি.মি./সে. = 300000000 মিটার/সে.
= 3×100000000 মি./সে. = 3×10^8 মি./সে.

আবার, একটি হাইড্রোজেন পরমাণুর ব্যাসার্ধ

$= 0\cdot0000000037$ সে. মি.

$= \dfrac{37}{10000000000}$ সে.মি.$= 37\times10^{-10}$ সে.মি.

$= 3\cdot7\times10\times10^{-10}$ সে.মি.$= 3\cdot7\times10^{-9}$ সে.মি.।

সুবিধার জন্য অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যাকে $a\times10^{n}$ আকারে প্রকাশ করা হয়, যেখানে, $1\leq a<10$ এবং $n\in Z$. কোনো সংখ্যার $a \times 10^{n}$ রূপকে বলা হয় সংখ্যাটির বৈজ্ঞানিক রূপ।

কাজ : নিচের সংখ্যাগুলোকে বৈজ্ঞানিক রূপে প্রকাশ কর :

(ক) 15000 (খ) $0\cdot000512$

৪·৬ লগারিদম পদ্ধতি

লগারিদম পদ্ধতি দুই ধরনের :

(ক) স্বাভাবিক লগারিদম (Natural logarithm) :

স্কটল্যান্ডের গণিতবিদ জন নেপিয়ার (*John Napier* : 1550 – 1617) ১৬১৪ সালে e কে ভিত্তি ধরে প্রথম লগারিদম সম্পর্কিত বই প্রকাশ করেন। e একটি অমূলদ সংখ্যা, $e=2\cdot71828$......... । তাঁর এই লগারিদমকে নেপিরিয়ান লগারিদম বা e ভিত্তিক লগারিদম বা স্বাভাবিক লগারিদমও বলা হয়। $\log_e x$ কে $\ln x$ আকারেও লেখা হয়।

(খ) সাধারণ লগারিদম (Common Logarithm) :

ইংল্যান্ডের গাণিতবিদ হেনরি ব্রিগস (*Henry Briggs* : 1561 – 1630) ১৬২৪ সালে 10কে ভিত্তি ধরে লগারিদমের টেবিল (লগ টেবিল বা লগ সারণি) তৈরি করেন। তাঁর এই লগারিদমকে ব্রিগস লগারিদম বা 10 ভিত্তিক লগারিদম বা ব্যবহারিক লগারিদমও বলা হয়।

দ্রষ্টব্য : লগারিদমের ভিত্তির উলেখ না থাকলে রাশির (বীজগণিতীয়) ক্ষেত্রে e কে এবং সংখ্যার ক্ষেত্রে 10 কে ভিত্তি হিসেবে ধরা হয়। লগ সারণিতে ভিত্তি 10 ধরতে হয়।

৪·৭ সাধারণ লগারিদমের পূর্ণক ও অংশক

(ক) পূর্ণক (Characteristics) :

ধরি, একটি সংখ্যা N কে বৈজ্ঞানিক আকারে প্রকাশ করে পাই,

$N=a\times10^{n}$, যেখানে $N>0, 1\leq a<10$ এবং $n\in Z$।

উভয়পক্ষে 10 ভিত্তিতে লগ নিয়ে পাই,

$\log_{10} N=\log_{10}(a\times10^{n})$

$=\log_{10} a+\log_{10} 10^{n}=\log_{10} a+n\log_{10} 10$

$\therefore \log_{10} N=n+\log_{10} a \quad [\because \log_{10} 10=1]$

ভিত্তি 10 উহ্য রেখে পাই,

$\log N=n+\log a$

nকে বলা হয় $\log N$ এর পূর্ণক।

লক্ষ করি : ছক ১

N	N এর বৈজ্ঞানিক রূপ	সূচক	দশমিক বিন্দুর বামের অংশের অঙ্কসংখ্যা	পূর্ণক
6237	$6\cdot237\times10^{3}$	3	4	$4-1=3$
$623\cdot7$	$6\cdot237\times10^{2}$	2	3	$3-1=2$
$62\cdot37$	$6\cdot237\times10^{1}$	1	2	$2-1=1$
$6\cdot237$	$6\cdot237\times10^{0}$	0	1	$1-1=0$
$0\cdot6237$	$6\cdot237\times10^{-1}$	-1	0	$0-1=-1$

লক্ষ করি : ছক ২

N	N এর বৈজ্ঞানিক রূপ	সূচক	দশমিক বিন্দু ও এর পরবর্তী সার্থক অঙ্কেও মাঝে 0 এর সংখ্যা	পূর্ণক
$0\cdot6237$	$6\cdot237\times10^{-1}$	-1	0	$-(0+1)=-1$
$0\cdot06237$	$6\cdot237\times10^{-2}$	-2	1	$-(1+1)=-2$
$0\cdot006237$	$6\cdot237\times10^{-3}$	-3	2	$-(2+1)=-3$

ছক ১ থেকে লক্ষ করি :

> প্রদত্ত সংখ্যার পূর্ণ অংশে যতগুলো অঙ্ক থাকবে, সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে সেই অঙ্কসংখ্যার চেয়ে 1 কম এবং তা হবে ধনাত্মক। অর্থাৎ উল্লিখিত অংক সংখ্যা m হলে সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে (m–1)

ছক–২ থেকে লক্ষ করি :

> প্রদত্ত সংখ্যার পূর্ণ অংশ না থাকলে দশমিক বিন্দু ও এর পরের প্রথম সার্থক অঙ্কের মাঝে যতগুলো ০ (শূন্য) থাকবে, সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে শূন্যের সংখ্যার চেয়ে 1 বেশি এবং তা হবে ঋণাত্মক। অর্থাৎ উল্লিখিত শূন্যের সংখ্যা k হলে সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে {–(k+1)}

দ্রষ্টব্য ১। পূর্ণক ধনাত্মক বা ঋনাত্মক হতে পারে, কিন্তু অংশক সর্বদা ধনাত্মক।

দ্রষ্টব্য ২। কোনো পূর্ণক ঋনাত্মক হলে, পূর্ণকটির বামে '–' চিহ্ন না দিয়ে পূর্ণকটির উপরে '–' (বার চিহ্ন) দিয়ে লেখা হয়। যেমন, পূর্ণক -3 কে লেখা হবে $\bar{3}$ দিয়ে। তা না হলে অংশকসহ লগের সম্পূর্ণ অংশটি ঋণাত্মক বুঝাবে।

উদাহরণ ১২। নিচের সংখ্যাগুলোর লগের পূর্ণক নির্ণয় কর :

(*i*) 5570 (*ii*) $45\cdot70$ (*iii*) $0\cdot4305$ (*iv*) $0\cdot000435$

সমাধান : (*i*) $5570=5\cdot570\times1000=5\cdot570\times10^{3}$

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 3.

অন্যভাবে, 5570 সংখ্যাটিতে অঙ্কের সংখ্যা 4 টি।

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $=4-1=3$

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 3.

(*ii*) $45 \cdot 70 = 4 \cdot 570 \times 10^1$

$\therefore$ সংখ্যাটির পূর্ণক 1.

অন্যভাবে, সংখ্যাটির দশমিকের বামে, অর্থাৎ পূর্ণ অংশে 2 টি অঙ্ক আছে।

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $= 2 - 1 = 1$

$\therefore$ $45 \cdot 70$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 1

(*iii*) $0 \cdot 4305 = 4 \cdot 305 \times 10^{-1}$

$\therefore$ সংখ্যাটির পূর্ণক -1

অন্যভাবে, সংখ্যাটির দশমিক বিন্দুর আগে, অর্থাৎ পূর্ণ অংশে কোনো সার্থক অঙ্ক নেই, বা শূন্যটি অঙ্ক আছে।

$\therefore$ সংখ্যাটির পূর্ণক $= 0 - 1 = -1 = \overline{1}$

অন্যভাবে, $0 \cdot 4305$ সংখ্যার দশমিক বিন্দু ও এর পরবর্তী ১ম সার্থক অঙ্ক 4 এর মাঝে কোনো 0 (শূন্য) নেই, অর্থাৎ শূন্যটি 0 আছে।

$\therefore$ সংখ্যাটির পূর্ণক $= -(0+1) = -1 = \overline{1}$

$\therefore$ $0 \cdot 4305$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $\overline{1}$

(*iv*) $0 \cdot 000435 = 4 \cdot 35 \times 10^{-4}$

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক -4 বা $\overline{4}$

অন্যভাবে, সংখ্যাটির দশমিক বিন্দু ও এর পরবর্তী ১ম সার্থক অঙ্ক 4 এর মাঝে 3 টি 0 (শূন্য) আছে।

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $= -(3+1) = -4 = \overline{4}$

$\therefore$ $0 \cdot 000435$ এর লগের পূর্ণক $\overline{4}$

(খ) অংশক (*Mantissa*) **:**

কোনো সংখ্যার সাধারণ লগের অংশক 1 অপেক্ষা ছোট একটি অঋণাত্মক সংখ্যা। এটি মূলত: অমূলদ সংখ্যা। তবে একটি নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত অংশকের মান বের করা হয়।

কোনো সংখ্যার লগের অংশক লগ তালিকা থেকে বের করা যায়। আবার তা ক্যালকুলেটরের সাহায্যেও বের করা যায়। আমরা দ্বিতীয় পদ্ধতিতে, অর্থাৎ ক্যালকুলেটরের সাহায্যে সংখ্যার লগের অংশক বের করবো।

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে সংখ্যার সাধারণ লগ নির্ণয় :

উদাহরণ ১৩। $\log 2717$ এর পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় কর :

সমাধান : ক্যালকুলেটর ব্যবহার করি :

AC	log	2717	=	$3 \cdot 43408$

$\therefore$ $\log 2717$ এর পূর্ণক 3 এবং অংশক $\cdot 43408$

উদাহরণ ১৪। $\log 43\cdot517$ এর পূর্ণক ও অংশক বের কর।

সমাধান : ক্যালকুলেটর ব্যবহার করি :

| AC | | log | | 43·517 | | = | 1·63866

$\therefore \log 43\cdot517$ এর পূর্ণক 1 এবং অংশক $\cdot 63866$

উদাহরণ ১৫। $0\cdot00836$ এর লগের পূর্ণক ও অংশক কত ?

সমাধান : ক্যালকুলেটর ব্যবহার করি :

| AC | | log | | 0·00836 | | = | $-2.07779=-3+0.92221=\overline{3}.92221$

$\therefore \log 0\cdot00836$ এর পূর্ণক -3 এবং অংশক $\cdot92221$, অংশকটি সর্বদা অঋণাত্মক হওয়ায় এখানে পূর্ণকের '–' চিহ্নটি সংখ্যাটির ওপরে দেখানো হয়।

উদাহরণ ১৬। $\log_e 10$ নির্ণয় কর :

সমাধান : $\log_e 10 = \dfrac{1}{\log_{10} e}$

$= \dfrac{1}{\log_{10} 2\cdot71828} = \dfrac{1}{0.43429}$ [ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

$= 2.30259$ (প্রায়)।

বিকল্প : ক্যালকুলেটর ব্যবহার করি :

| AC | | ln | | 10 | | = | 2.30259 (প্রায়)

কাজ : ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলোর 10 ভিত্তিক ও e ভিত্তিক লগ নির্ণয় কর :

(*i*) 2550 (*ii*) 52·143 (*iii*) 0·4145 (*iv*) 0·0742

অনুশীলনী ৪·৩

১। কোন শর্তে $a^0=1$?

ক. $a=0$ খ. $a\neq0$ গ. $a>0$ ঘ. $a\neq1$

২। $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}$ এর মান নিচের কোনটি ?

ক. $\sqrt[6]{5}$ খ. $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$ গ. $\left(\sqrt{5}\right)^3$ ঘ. $\sqrt[3]{25}$

৩। কোন শর্তে $log_a a=1$?

ক. $a>0$ খ. $a\neq1$ গ. $a>0, a\neq1$ ঘ. $a\neq0, a>1$

৪। $log_x 4=2$ হলে, x এর মান কত ?

ক. 2 খ. ±2 গ. 4 ঘ. 10

৫। একটি সংখ্যাকে $a\times10^n$ আকারে লেখার জন্য শর্ত কোনটি ?

ক. $1<a<10$ খ. $1\leq a\leq10$ গ. $1\leq a<10$ ঘ. $1<a\leq10$

৬। নিচের উক্তিগুলো লক্ষ কর :

$i.\ \log_a(m)^p = p\log_a m$

$ii.\ 2^4 = 16$ এবং $\log_2 16 = 4$ সমার্থক

$iii.\ \log_a(m+n) = \log_a m + \log_a n$

উক্তিগুলোর প্রেক্ষিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

৭। $0\cdot0035$ এর সাধারণ লগের পূর্ণক কত ?

ক. 3 খ. 1 গ. $\bar{2}$ ঘ. $\bar{3}$

৮। $0\cdot0225$ সংখ্যাটি বিবেচনা করে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

(১) সংখ্যাটির a^n আকার নিচের কোনটি ?

ক. $(2\cdot5)^2$ খ. $(\cdot015)^2$ গ. $(1\cdot5)^2$ ঘ. $(\cdot15)^2$

(২) সংখ্যাটির বৈজ্ঞানিক রূপ নিচের কোনটি ?

ক. 225×10^{-4} খ. $22\cdot5\times10^{-3}$ গ. $2\cdot25\times10^{-2}$ ঘ. $\cdot225\times10^{-1}$

(৩) সংখ্যাটির সাধারণ লগের পূর্ণক কত ?

ক. $\bar{2}$ খ. $\bar{1}$ গ. 0 ঘ. 2

৯। বৈজ্ঞানিক রূপে প্রকাশ কর :

(ক) 6530 (খ) $60\cdot831$ (গ) $0\cdot000245$ (ঘ) 37500000 (ঙ) $0\cdot00000014$

১০। সাধারণ দশমিক রূপে প্রকাশ কর :

(ক) 10^5 (খ) 10^{-5} (গ) $2\cdot53\times10^4$ (ঘ) $9\cdot813\times10^{-3}$ (ঙ) $3\cdot12\times10^{-5}$

১১। নিচের সংখ্যাগুলোর সাধারণ লগের পূর্ণক বের কর (ক্যালকুলেটর ব্যবহার না করে) :

(ক) 4820 (খ) $72\cdot245$ (গ) $1\cdot734$ (ঘ) $0\cdot045$ (ঙ) $0\cdot000036$

১২। ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিচের সংখ্যাগুলোর সাধারণ লগের পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় কর :

(ক) 27 (খ) $63\cdot147$ (গ) $1\cdot405$ (ঘ) $0\cdot0456$ (ঙ) $0\cdot000673$

১৩। গুণফলের/ভাগফলের সাধারণ লগ (আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত) নির্ণয় কর :

(ক) $5\cdot34\times8\cdot7$ (খ) $0\cdot79\times0\cdot56$ (গ) $22\cdot2642\div3\cdot42$ (ঘ) $0\cdot19926\div32\cdot4$

১৪। যদি $\log2 = 0\cdot30103, \log3 = 0\cdot47712$ এবং $\log7 = 0\cdot84510$ হয়, তবে নিচের রাশিগুলোর মান নির্ণয় কর :

(ক) $\log 9$ (খ) $\log 28$ (গ) $\log 42$

১৫। দেওয়া আছে, $x = 1000$ এবং $y = 0\cdot0625$

ক. x কে $a^n b^n$ আকারে প্রকাশ কর, যেখানে a ও b মৌলিক সংখ্যা।

খ. x ও y এর গুণফলকে বৈজ্ঞানিক আকারে প্রকাশ কর।

গ. xy এর সাধারণ লগের পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় কর।

পঞ্চম অধ্যায়

এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ

(Equations with One Variable)

আমরা পূর্বের শ্রেণিতে চলক ও সমীকরণ কী তা জেনেছি এবং এদের ব্যবহার শিখেছি। এক চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণের সমাধান শিখেছি এবং বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সরল সমীকরণ গঠন করে তা সমাধান করা সম্পর্কে সম্যক জ্ঞান লাভ করেছি। এ অধ্যায়ে এক চলকবিশিষ্ট একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণ এবং অভেদ সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে এবং বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সমাধানে এদের ব্যবহার দেখানো হয়েছে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- চলকের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সমীকরণ ও অভেদের পার্থক্য ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- একঘাত সমীকরণের সমাধান করতে পারবে।
- বাস্তবভিত্তিক সমস্যার একঘাত সমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে পারবে।
- দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করতে পারবে ও সমাধান সেট নির্ণয় করতে পারবে।
- বাস্তবভিত্তিক সমস্যার দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে পারবে।

৫·১ চলক

আমরা জানি, $x+3=5$ একটি সমীকরণ। এটি সমাধান করতে হলে আমরা অজ্ঞাত রাশি x এর মান বের করি। এখানে অজ্ঞাত রাশি x একটি চলক। আবার, $x+a=5$ সমীকরণটি সমাধান করতে হলে, আমরা x এর মান নির্ণয় করি, a এর মান নয়। এখানে x কে চলক ও a কে ধ্রুবক হিসেবে ধরা হয়। এক্ষেত্রে x এর মান a এর মাধ্যমে পাওয়া যাবে। তবে a এর মান নির্ণয় করতে হলে, আমরা লিখবো $a=5-x$; অর্থাৎ a এর মান x এর মাধ্যমে পাওয়া যাবে। এখানে a চলক ও x ধ্রুবক হিসেবে বিবেচিত। তবে বিশেষ কোনো নির্দেশনা না থাকলে প্রচলিত রীতি অনুযায়ী x কে চলক হিসেবে ধরা হয়। সাধারণত ইংরেজি বর্ণমালার ছোট হাতের শেষের দিকের অক্ষর x, y, z কে চলক হিসেবে এবং প্রথম দিকের অক্ষর a, b, c কে ধ্রুবক হিসেবে ব্যবহার করা হয়।

যে সমীকরণে একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে, তাকে এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ বা সরল সমীকরণ বলা হয়। যেমন, $x+3=5, x^2-5x+b=০, 2y^2+5y-3=০$ ইত্যাদি, এগুলো এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ।

আমরা সেট সম্পর্কে জানি। যদি একটি সেট $S=\{x : x \in R, 1 \leq x \leq 10\}$ হয়, তবে x-এর মান 1 থেকে 10 পর্যন্ত যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। এখানে x একটি চলক। কাজেই আমরা বলতে পারি যে, যখন কোনো অক্ষর প্রতীক কোনো সেটের অনির্দিষ্ট উপাদান বুঝায় তখন তাকে চলক বলে।

সমীকরণের ঘাত: কোনো সমীকরণের চলকের সর্বোচ্চ ঘাতকে সমীকরণটির ঘাত বলে। $x+1=5$, $2x-1=x+5$, $y+7=2y-3$ সমীকরণগুলোর প্রত্যেকটির ঘাত 1; এগুলো এক চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ।

আবার, $x^2+5x+6=0$, $y^2-y=12$, $4x^2-2x=3-6x$ সমীকরণগুলোর প্রত্যেকটির ঘাত 2; এগুলো এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ। $2x^3-x^2-4x+4=0$ সমীকরণটি এক চলকবিশিষ্ট ত্রিঘাত সমীকরণ।

৫.২ সমীকরণ ও অভেদ

সমীকরণ : সমীকরণে সমান চিহ্নের দুইপক্ষে দুইটি বহুপদী থাকে, অথবা একপক্ষে (প্রধানত ডানপক্ষে) শূন্য থাকতে পারে। দুই পক্ষের বহুপদীর চলকের সর্বোচ্চ ঘাত সমান নাও হতে পারে। সমীকরণ সমাধান করে চলকের সর্বোচ্চ ঘাতের সমান সংখ্যক মান পাওয়া যাবে। এই মান বা মানগুলোকে বলা হয় সমীকরণটির মূল। এই মূল বা মূলগুলো দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হবে। একাধিক মূলের ক্ষেত্রে এগুলো সমান বা অসমান হতে পারে। যেমন, $x^2-5x+6=0$ সমীকরণটির মূল $2,3$ । আবার, $(x-3)^2=0$ সমীকরণে x এর মান 3 হলেও এর মূল $3,3$ ।

অভেদ : সমান চিহ্নের দুইপক্ষে সমান ঘাতবিশিষ্ট দুইটি বহুপদী থাকে। চলকের সর্বোচ্চ ঘাতের সংখ্যার চেয়েও অধিক সংখ্যক মানের জন্য অভেদটি সিদ্ধ হবে। সমান চিহ্নের উভয় পক্ষের মধ্যে কোনো ভেদ নেই বলেই অভেদ। যেমন, $(x+1)^2-(x-1)^2=4x$ একটি অভেদ; এটি x এর সকল মানের জন্য সিদ্ধ হবে। তাই এই সমীকরণটি একটি অভেদ। প্রত্যেক বীজগণিতীয় সূত্র একটি অভেদ। যেমন, $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ইত্যাদি অভেদ।

সকল সমীকরণ অভেদ নয়। অভেদে সমান (=) চিহ্নের পরিবর্তে '$\equiv$' চিহ্ন ব্যবহৃত হয়। তবে সকল অভেদই সমীকরণ বলে অভেদের ক্ষেত্রেও সাধারণত সমান চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।

সমীকরণ ও অভেদের পার্থক্য নিচে দেওয়া হলো :

সমীকরণ	অভেদ
১। সমান চিহ্নের দুই পক্ষে দুইটি বহুপদী থাকতে পারে অথবা এক পক্ষে শূন্য থাকতে পারে।	১। দুই পক্ষে দুইটি বহুপদী থাকে।
২। উভয় পক্ষের বহুপদীর মাত্রা অসমান হতে পারে।	২। উভয় পক্ষে বহুপদীর মাত্রা সমান থাকে।
৩। চলকের এক বা একাধিক মানের জন্য সমতাটি সত্য হয়।	৩। চলকের মূল সেটের সকল মানের জন্য সাধারণত সমতাটি সত্য হয়।
৪। চলকের মানের সংখ্যা সর্বাধিক মাত্রার সমান হতে পারে।	৪। চলকের অসংখ্য মানের জন্য সমতাটি সত্য।
৫। সকল সমীকরণ অভেদ নয়।	৫। সকল বীজগণিতীয় সূত্রই অভেদ।

কাজ : ১। নিচের সমীকরণগুলোর কোনটির ঘাত কত ও মূল কয়টি ?

$(i)\ 3x+1=5$ $\qquad$ $(ii)\ \frac{2y}{5}-\frac{y-1}{3}=\frac{3y}{2}$

২। তিনটি অভেদ লেখ।

৫·৩ একঘাত সমীকরণের সমাধান

সমীকরণ সমাধানের ক্ষেত্রে কয়েকটি নিয়ম প্রয়োগ করতে হয়। এই নিয়মগুলো জানা থাকলে সমীকরণের সমাধান নির্ণয় সহজতর হয়। নিয়মগুলো হলো :

১। সমীকরণের উভয়পক্ষে একই সংখ্যা বা রাশি যোগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।

২। সমীকরণের উভয়পক্ষ থেকে একই সংখ্যা বা রাশি বিয়োগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।

৩। সমীকরণের উভয়পক্ষকে একই সংখ্যা বা রাশি দ্বারা গুণ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।

৪। সমীকরণের উভয়পক্ষকে অশূন্য একই সংখ্যা বা রাশি দ্বারা ভাগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।

উপরের ধর্মগুলোকে বীজগণিতীয় প্রতীকের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় :

যদি $x=a$ এবং $c\neq 0$ হয় তাহলে,

$(i)\ x+c=a+c \quad (ii)\ x-c=a-c \quad (iii)\ xc=ac \quad (iv)\ \frac{x}{c}=\frac{a}{c}$

এছাড়া যদি a, b ও c তিনটি রাশি হয় তবে, $a=b+c$ হলে, $a-b=c$ হবে এবং $a+c=b$ হলে, $a=b-c$ হবে।

এই নিয়মটি পক্ষান্তর বিধি হিসেবে পরিচিত এবং এই বিধি প্রয়োগ করে বিভিন্ন সমীকরণ সমাধান করা হয়।

কোনো সমীকরণের পদগুলো ভগ্নাংশ আকারে থাকলে, লবগুলোতে চলকের ঘাত 1 এবং হরগুলো ধ্রুবক হলে, সেটি একঘাত সমীকরণ।

উদাহরণ ১। সমাধান কর : $\frac{5x}{7}-\frac{4}{5}=\frac{x}{5}-\frac{2}{7}$

সমাধান : $\frac{5x}{7}-\frac{4}{5}=\frac{x}{5}-\frac{2}{7}$ বা, $\frac{5x}{7}-\frac{x}{5}=\frac{4}{5}-\frac{2}{7}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{25x-7x}{35}=\frac{28-10}{35}$ বা, $\frac{18x}{35}=\frac{18}{35}$

বা, $18x=18$

বা, $x=1$

$\therefore$ সমাধান $x=1$.

এখন, আমরা এমন সমীকরণের সমাধান করবো যা দ্বিঘাত সমীকরণের আকারে থাকে। এ সকল সমীকরণ সরলীকরণের মাধ্যমে সমতুল সমীকরণে রূপান্তর করে $ax=b$ আকারের একঘাত সমীকরণে পরিণত করা হয়। আবার, হরে চলক থাকলেও সরলীকরণ করে একঘাত সমীকরণে রূপান্তর করা হয়।

উদাহরণ ২। সমাধান কর : $(y-1)(y+2)=(y+4)(y-2)$

সমাধান : $(y-1)(y+2)=(y+4)(y-2)$

বা, $y^2-y+2y-2=y^2+4y-2y-8$

বা, $y-2=2y-8$

বা, $y-2y=-8+2$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $-y=-6$

বা, $y=6$

$\therefore$ সমাধান $y=6$

উদাহরণ ৩। সমাধান কর ও সমাধান সেট লেখ : $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-1}=\frac{2x-1}{5}$

সমাধান : $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-1}=\frac{2x-1}{5}$

বা, $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-1}{5}=\frac{2x-4}{7x-1}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{6x+1-6x+3}{15}=\frac{2x-4}{7x-1}$ বা, $\frac{4}{15}=\frac{2x-4}{7x-1}$

বা, $15(2x-4)=4(7x-1)$ [আড়গুণন করে]

বা, $30x-60=28x-4$

বা, $30x-28x=60-4$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $2x=56,$ বা, $x=28$

$\therefore$ সমাধান $x=28$

এবং সমাধান সেট $S=\{28\}$

উদাহরণ ৪। সমাধান কর : $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-5}$

সমাধান : $\frac{1`}{x-3}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-5}$

বা, $\frac{x-4+x-3}{(x-3)(x-4)}=\frac{x-5+x-2}{(x-2)(x-5)}$ বা, $\frac{2x-7}{x^2-7x+12}=\frac{2x-7}{x^2-7x+10}$

দুই পক্ষের ভগ্নাংশ দুইটির মান সমান। আবার, দুই পক্ষের লব সমান, কিন্তু হর অসমান। এক্ষেত্রে একমাত্র লবের মান শূন্য হলেই দুই পক্ষ সমান হবে।

$\therefore$ $2x-7=0$ বা, $2x=7$ বা, $x=\frac{7}{2}$

$\therefore$ $x=\frac{7}{2}$

কাজ : ১। $\left(\sqrt{5}+1\right)x+4=4\sqrt{5}$ হলে, দেখাও যে, $x=6-2\sqrt{5}$

৫·৪ একঘাত সমীকরণের ব্যবহার

বাস্তব জীবনে বিভিন্ন ধরনের সমস্যার সমাধান করতে হয়। এই সমস্যা সমাধানের অধিকাংশ ক্ষেত্রেই গাণিতিক জ্ঞান, দক্ষতা ও যুক্তির প্রয়োজন হয়। বাস্তব ক্ষেত্রে গাণিতিক জ্ঞান ও দক্ষতার প্রয়োগে একদিকে যেমন সমস্যার সুষ্ঠু সমাধান হয়, অন্যদিকে তেমনি প্রাত্যহিক জীবনে গণিতের মাধ্যমে সমস্যার সমাধান পাওয়া যায় বিধায়, শিক্ষার্থীরা গণিতের প্রতি আকৃষ্ট হয়। এখানে প্রাত্যহিক জীবনের বিভিন্ন সমস্যাকে সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করে তার সমাধান করা হবে।

বাস্তবভিত্তিক সমস্যা সমাধানে অজ্ঞাত সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য এর পরিবর্তে চলক ধরে নিয়ে সমস্যায় প্রদত্ত শর্তানুসারে সমীকরণ গঠন করা হয়। তারপর সমীকরণটি সমাধান করলেই চলকটির মান, অর্থাৎ অজ্ঞাত সংখ্যাটি পাওয়া যায়।

উদাহরণ ৫। দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্কটি দশক স্থানীয় অঙ্ক অপেক্ষা 2 বেশি। অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে তা প্রদত্ত সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 6 কম হবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, দশক স্থানীয় অঙ্কটি x; অতএব, একক স্থানীয় অঙ্কটি হবে $x+2$.

$\therefore$ সংখ্যাটি $10x+(x+2)$ বা, $11x+2$.

অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে পরিবর্তিত সংখ্যাটি হবে $10(x+2)+x$ বা, $11x+20$

প্রশ্নমতে, $11x+20=2(11x+2)-6$

বা, $11x+20=22x+4-6$

বা, $22x-11x=20+6-4$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $11x=22$

বা, $x=2$

$\therefore$ সংখ্যাটি $11x+2=11\times2+2=24$

$\therefore$ প্রদত্ত সংখ্যাটি 24.

উদাহরণ ৬। একটি শ্রেণির প্রতিবেঞ্চে 4 জন করে ছাত্র বসালে 3টি বেঞ্চ খালি থাকে। আবার, প্রতিবেঞ্চে 3 জন করে ছাত্র বসালে 6 জন ছাত্রকে দাঁড়িয়ে থাকতে হয়। ঐ শ্রেণির ছাত্র সংখ্যা কত ?

সমাধান : মনে করি, শ্রেণিটির ছাত্র সংখ্যা x.

যেহেতু প্রতিবেঞ্চে 4 জন করে বসালে 3টি বেঞ্চ খালি থাকে, সেহেতু ঐ শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা $=\dfrac{x}{4}+3$

আবার, যেহেতু প্রতিবেঞ্চে 3 জন করে বসালে 6 জনকে দাঁড়িয়ে থাকতে হয়, সেহেতু ঐ শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা $=\dfrac{x-6}{3}$

যেহেতু বেঞ্চের সংখ্যা একই থাকবে,

সুতরাং, $\dfrac{x}{4}+3=\dfrac{x-6}{3}$ বা, $\dfrac{x+12}{4}=\dfrac{x-6}{3}$

বা, $4x-24=3x+36$, বা, $4x-3x=36+24$

বা, $x=60$

$\therefore$ ঐ শ্রেণির ছাত্র সংখ্যা 60.

উদাহরণ ৭। কবির সাহেব তাঁর 56000 টাকার কিছু টাকা বার্ষিক 12% মুনাফায় ও বাকি টাকা বার্ষিক 10% মুনাফায় বিনিয়োগ করলেন। এক বছর পর তিনি মোট 6400 টাকা মুনাফা পেলেন। তিনি 12% মুনাফায় কত টাকা বিনিয়োগ করেছেন ?

সমাধান : মনে করি, কবির সাহেব 12% মুনাফায় x টাকা বিনিয়োগ করেছেন।

$\therefore$ তিনি 10% মুনাফায় বিনিয়োগ করেছেন $(56000-x)$ টাকা।

এখন, x টাকার 1 বছরের মুনাফা $x\times\dfrac{12}{100}$ টাকা, বা, $\dfrac{12x}{100}$ টাকা।

আবার, $(56000-x)$ টাকার 1 বছরের মুনাফা $(56000-x)\times\frac{10}{100}$ টাকা, বা, $\frac{10(56000-x)}{100}$ টাকা।

প্রশ্নমতে, $\frac{12x}{100}+\frac{10(56000-x)}{100}=6400$

বা, $12x+560000-10x=640000$

বা, $2x=640000-560000$

বা, $2x=80000$

বা, $x=40000$

$\therefore$ কবির সাহেব 12% মুনাফায় 40000 টাকা বিনিয়োগ করেছেন।

> **কাজ :** সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর :
>
> ১। $\frac{3}{5}$ ভগ্নাংশটির লব ও হরের সাথে কোন একই সংখ্যা যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{4}{5}$ হবে ?
>
> ২। দুইটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের অন্তর 151 হলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।
>
> ৩। 120 টি এক টাকার মুদ্রা ও দুই টাকার মুদ্রায় মোট 180 টাকা হলে, কোন প্রকারের মুদ্রার সংখ্যা কয়টি ?

অনুশীলনী ৫·১

সমাধান কর (১–১০) :

১। $3(5x-3)=2(x+2)$

২। $\frac{ay}{b}-\frac{by}{a}=a^2-b^2$

৩। $(z+1)(z-2)=(z-4)(z+2)$

৪। $\frac{7x}{3}+\frac{3}{5}=\frac{2x}{5}-\frac{4}{3}$

৫। $\frac{4}{2x+1}+\frac{9}{3x+2}=\frac{25}{5x+4}$

৬। $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$

৭। $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a+b}{x-a-b}$

৮। $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}+\frac{x-3a-3b}{a+b}=0$

৯। $\frac{x-a}{a^2-b^2}=\frac{x-b}{b^2-a^2}$

১০। $(3+\sqrt{3})z+2=5+3\sqrt{3}.$

সমাধান সেট নির্ণয় কর (১১–১৯) :

১১। $2x(x+3)=2x^2+12$

১২। $2x+\sqrt{2}=3x-4-3\sqrt{2}$

১৩। $\frac{x+a}{x-b}=\frac{x+a}{x+c}$

১৪। $\frac{z-2}{z-1}=2-\frac{1}{z-1}$

১৫। $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x-1}$

১৬। $\frac{m}{m-x}+\frac{n}{n-x}=\frac{m+n}{m+n-x}$

১৭। $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+3}$

১৮। $\frac{2t-6}{9}+\frac{15-2t}{12-5t}=\frac{4t-15}{18}$

১৯। $\frac{x+2b^2+c^2}{a+b}+\frac{x+2c^2+a^2}{b+c}+\frac{x+2a^2+b^2}{c+a}=0$

সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর (২০–২৭) :

২০। একটি সংখ্যা অপর একটি সংখ্যার $\frac{2}{5}$ গুণ। সংখ্যা দুইটির সমষ্টি 98 হলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

২১। একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হরের অন্তর 1 ; লব থেকে 2 বিয়োগ ও হরের সাথে 2 যোগ করলে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যাবে তা $\frac{1}{6}$ এর সমান। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

২২। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 9 ; অঙ্ক দুইটি স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে তা প্রদত্ত সংখ্যা হতে 45 কম হবে। সংখ্যাটি কত ?

২৩। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার দশক স্থানীয় অঙ্ক একক স্থানীয় অঙ্কের দ্বিগুণ। দেখাও যে, সংখ্যাটি অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সাতগুণ।

২৪। একজন ক্ষুদ্র ব্যবসায়ী 5600 টাকা বিনিয়োগ করে এক বছর পর কিছু টাকার উপর 5% এবং অবশিষ্ট টাকার উপর 4% লাভ করলেন। মোট 256 টাকা লাভ করলে, তিনি কত টাকার উপর 5% লাভ করলেন ?

২৫। একটি লঞ্চে যাত্রী সংখ্যা 47; মাথাপিছু কেবিনের ভাড়া ডেকের ভাড়ার দ্বিগুণ। ডেকের ভাড়া মাথাপিছু 30 টাকা এবং মোট ভাড়া প্রাপ্তি 1680 টাকা হলে, কেবিনের যাত্রী সংখ্যা কত ?

২৬। 120 টি পঁচিশ পয়সার মুদ্রা ও পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রায় মোট 35 টাকা হলে, কোন প্রকারের মুদ্রার সংখ্যা কয়টি ?

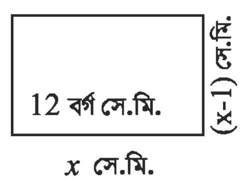
২৭। একটি গাড়ি ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে কিছু পথ এবং ঘণ্টায় 40 কি.মি. বেগে অবশিষ্ট পথ অতিক্রম করলো। গাড়িটি মোট 5 ঘণ্টায় 240 কি.মি. পথ অতিক্রম করলে, ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে কতদূর গিয়েছে ?

৫·৫ এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ

$ax^2+bx+c=0$ [যেখানে a, b, c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$] আকারের সমীকরণকে এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হয়। দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষ একটি দ্বিমাত্রিক বহুপদী। সমীকরণের ডানপক্ষ শূন্য ধরা হয়।

12 বর্গ সে.মি. ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তাকারক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x সে.মি. ও প্রস্থ $(x-1)$ সে.মি.।

$\therefore$ আয়তাকারক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = $x(x-1)$ বর্গ সে.মি.



প্রশ্নমতে, $x(x-1)=12$, বা $x^2-x-12=0$

সমীকরণটিতে একটি চলক x এবং x এর সর্বোচ্চ ঘাত 2 ।

এরূপ সমীকরণ হলো দ্বিঘাত সমীকরণ।

যে সমীকরণে চলকের সর্বোচ্চ ঘাত 2 , তাকে দ্বিঘাত সমীকরণ বলে।

আমরা অষ্টম শ্রেণিতে x^2+px+q এবং ax^2+bx+c আকারের এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করেছি। এখানে আমরা $x^2+px+q=0$ এবং $ax^2+bx+c=0$ আকারের দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে চলকের মান নির্ণয়ের মাধ্যমে এরূপ সমীকরণ সমাধান করবো।

উৎপাদকে বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে বাস্তব সংখ্যার একটি গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম প্রয়োগ করা হয়। ধর্মটি নিম্নরূপ :

যদি দুইটি রাশির গুণফল শূন্য হয়, তবে রাশিদ্বয়ের যেকোনোটি অথবা উভয় রাশি শূন্য হবে। অর্থাৎ, দুইটি রাশি a ও b এর গুণফল $ab=0$ হলে, $a=0$ বা, $b=0$, অথবা $a=0$ এবং $b=0$ হবে।

উদাহরণ ৮। সমাধান কর : $(x+2)(x-3)=0$

সমাধান : $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore$ $x+2=0$, অথবা $x-3=0$

$x+2=0$ হলে, $x=-2$

আবার, $x-3=0$ হলে, $x=3$

$\therefore$ সমাধান $x=-2$ অথবা 3

উদাহরণ ৯। সমাধান সেট নির্ণয় কর : $y^2=\sqrt{3}y$

সমাধান : $y^2=\sqrt{3}y$

বা, $y^2-\sqrt{3}y=0$ [পক্ষান্তর করে ডানপক্ষ শূন্য করা হয়েছে]

বা, $y(y-\sqrt{3})=0$

$\therefore$ $y=0$, অথবা $y-\sqrt{3}=0$

আবার, $y-\sqrt{3}=0$ হলে, $y=\sqrt{3}$

$\therefore$ সমাধান সেট $\{0,\sqrt{3}\}$

উদাহরণ ১০। সমাধান কর ও সমাধান সেট লেখ : $x-4=\dfrac{x-4}{x}$

সমাধান : $x-4=\dfrac{x-4}{x}$

বা, $x(x-4)=x-4$ [আড়গুণন করে]

বা, $x(x-4)-(x-4)=0$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $(x-4)(x-1)=0$

$\therefore$ $x-4=0$, অথবা $x-1=0$

$x-4=0$ হলে, $x=4$

আবার, $x-1=0$ হলে, $x=1$

$\therefore$ সমাধান $x=1$ অথবা 4

সমাধান সেট $\{1,\ 4\}$

উদাহরণ ১১। সমাধান কর : $\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^2-5\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)+6=0$

সমাধান : $\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^2-5\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)+6=0..........(1)$

ধরি, $\frac{x+a}{x-a}=y$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $y^2-5y+6=0$

বা, $y^2-2y-3y+6=0$

বা, $y(y-2)-3(y-2)=0$

বা, $(y-2)(y-3)=0$

$\therefore$ $y-2=0$ হলে, $y=2$

অথবা $y-3=0$ হলে, $y=3$

এখন, $y=2$ হলে,

$\frac{x+a}{x-a}=\frac{2}{1}$ [y এর মান বসিয়ে]

বা, $\frac{x+a+x-a}{x+a-x+a}=\frac{2+1}{2-1}$ [যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2x}{2a}=\frac{3}{1}$

বা, $x=3a$

আবার, $y=3$ হলে, $\frac{x+a}{x-a}=\frac{3}{1}$

বা, $\frac{x+a+x-a}{x+a-x+a}=\frac{3+1}{3-1}$ [যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2x}{2a}=\frac{4}{2}$

বা, $\frac{x}{a}=\frac{2}{1}$

বা, $x=2a$

$\therefore$ সমাধান $x=2a$ অথবা, $3a$

কাজ :

১। $x^2-1=0$ সমীকরণটিকে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে a,b,c এর মান লেখ।

২। $(x-1)^2=0$ সমীকরণটির ঘাত কত ? এর মূল কয়টি ও কী কী ?

৫·৬ দ্বিঘাত সমীকরণের ব্যবহার

আমাদের দৈনন্দিন জীবনের অনেক সমস্যা এক চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ ও দ্বিঘাত সমীকরণে রূপান্তর করে সহজে সমাধান করা যায়। এখানে, বাস্তবভিত্তিক সমস্যায় প্রদত্ত শর্ত থেকে দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করে সমাধান করার কৌশল দেখানো হলো।

উদাহরণ ১২। একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের হর, লব অপেক্ষা 4 বেশি। ভগ্নাংশটি বর্গ করলে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যাবে তার হর, লব অপেক্ষা 40 বেশি হবে। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, ভগ্নাংশটি $\frac{x}{x+4}$

ভগ্নাংশটির বর্গ = $\left(\frac{x}{x+4}\right)^2 = \frac{x^2}{(x+4)^2} = \frac{x^2}{x^2+8x+16}$

এখানে, লব = x^2 এবং হর = $x^2+8x+16$.

প্রশ্নমতে, $x^2+8x+16 = x^2+40$

বা, $8x+16=40$

বা, $8x=40-16$

বা, $8x=24$

বা, $x=3$

$\therefore\ x+4=3+4=7$

$\therefore\ \frac{x}{x+4}=\frac{3}{3+4}=\frac{3}{7}$

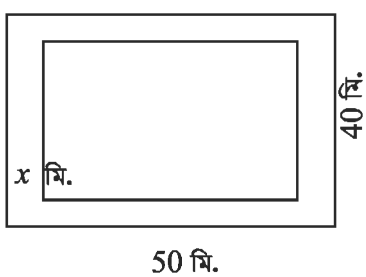
$\therefore$ ভগ্নাংশটি $\frac{3}{7}$

উদাহরণ ১৩। 50 মিটার দৈর্ঘ্য এবং 40 মিটার প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তাকার বাগানের ভিতরের চারদিকে সমান চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তা বাদে বাগানের ক্ষেত্রফল 1200 বর্গমিটার হলে, রাস্তাটি কত মিটার চওড়া ?

সমাধান : মনে করি, রাস্তাটি x মিটার চওড়া।

রাস্তা বাদে বাগানটির দৈর্ঘ্য $(50-2x)$ মিটার এবং প্রস্থ $(40-2x)$ মিটার।

$\therefore$ রাস্তা বাদে বাগানটির ক্ষেত্রফল = $(50-2x)\times(40-2x)$ বর্গমিটার।



প্রশ্নমতে, $(50-2x)(40-2x)=1200$

বা, $2000-80x-100x+4x^2=1200$

বা, $4x^2-180x+800=0$

বা, $x^2-45x+200=0$ [4 দিয়ে ভাগ করে]

বা, $x^2-5x-40x+200=0$

বা, $x(x-5)-40(x-5)=0$

বা, $(x-5)(x-40)=0$

$\therefore\ x-5=0$, অথবা $x-40=0$

$x-5=0$ হলে, $x=5$

$x-40=0$ হলে, $x=40$

কিন্তু রাস্তাটির চওড়া বাগানটির প্রস্থ 40 মিটার থেকেও কম হবে।

$\therefore\ x \neq 40\ ;\ \therefore\ x = 5$

$\therefore$ রাস্তাটি 5 মিটার চওড়া।

উদাহরণ ১৪। শাহিক 240 টাকায় কতকগুলো কলম কিনল। সে যদি ঐ টাকায় একটি কলম বেশি পেতো তবে প্রতিটি কলমের দাম গড়ে 1 টাকা কম পড়তো। সে কতগুলো কলম কিনল ?

সমাধান : মনে করি, শাহিক 240 টাকায় মোট x টি কলম কিনেছিল। এতে প্রতিটি কলমের দাম পড়ে $\frac{240}{x}$ টাকা। সে যদি 240 টাকায় $(x+1)$ টি কলম পেতো তবে প্রতিটি কলমের দাম পড়তো $\frac{240}{x+1}$ টাকা।

প্রশ্নমতে, $\frac{240}{x+1} = \frac{240}{x} - 1$, বা, $\frac{240}{x+1} = \frac{240-x}{x}$

বা, $240x = (x+1)(240-x)$ [আড়গুণন করে]

বা, $240x = 240x + 240 - x^2 - x$

বা, $x^2 + x - 240 = 0$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $x^2 + 16x - 15x - 240 = 0$

বা, $x(x+16) - 15(x+16) = 0$

বা, $(x+16)(x-15) = 0$

$\therefore x + 16 = 0$, অথবা $x - 15 = 0$

$x + 16 = 0$ হলে, $x = -16$

$x - 15 = 0$ হলে, $x = 15$

কিন্তু কলমের সংখ্যা x ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore\ x \neq -16;\quad \therefore\ x = 15$

$\therefore$ শাহিক 15 টি কলম কিনেছিল।

কাজ : সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর :

১। একটি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সাথে ঐ সংখ্যাটি যোগ করলে যোগফল ঠিক পরবর্তী স্বাভাবিক সংখ্যার নয়গুণের সমান হবে। সংখ্যাটি কত ?

২। 10 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্র হতে একটি জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য বৃত্তটির অর্ধ–জ্যা অপেক্ষা 2 সে.মি. কম। আনুমানিক চিত্র অঙ্কন করে জ্যাটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উদাহরণ ১৫। একটি বিদ্যালয়ের নবম শ্রেণির একটি পরীক্ষায় x জন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত মোট নম্বর 1950; একই পরীক্ষায় অন্য একজন নতুন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত নম্বর 34 যোগ করায় প্রাপ্ত নম্বরের গড় 1 কমে গেল।

ক. পৃথকভাবে x জন ছাত্রের এবং নতুন ছাত্রসহ সকলের প্রাপ্ত নম্বরের গড় x এর মাধ্যমে লেখ।

খ. প্রদত্ত শর্তানুসারে সমীকরণ গঠন করে দেখাও যে, $x^2+35x-1950=0$

গ. x এর মান বের করে দুইক্ষেত্রে নম্বরের গড় কত তা নির্ণয় কর।

সমাধান : ক. x জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের গড় = $\frac{1950}{x}$

নতুন ছাত্রের নম্বরসহ $(x+1)$ জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের গড় $\frac{1950+34}{x+1}=\frac{1984}{x+1}$

খ. প্রশ্নমতে, $\frac{1950}{x}=\frac{1984}{x+1}+1$

বা, $\frac{1950}{x}-\frac{1984}{x+1}=1$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{1950x+1950-1984x}{x(x+1)}=1$

বা, $x^2+x=1950x-1984x+1950$ [আড়গুণন করে]

বা, $x^2+x=1950-34x$

$\therefore$ $x^2+35x-1950=0$ [দেখানো হলো]

গ. $x^2+35x-1950=0$

বা, $x^2+65x-30x-1950=0$

বা, $x(x+65)-30(x+65)=0$

বা, $(x+65)(x-30)=0$

$\therefore x+65=0$, অথবা $x-30=0$

$x+65=0$ হলে, $x=-65$

আবার, $x-30=0$ হলে, $x=30$

যেহেতু ছাত্রের সংখ্যা x ঋণাত্মক হতে পারে না,

সুতরাং , $x\neq-65$

$\therefore$ $x=30$

$\therefore$ প্রথম ক্ষেত্রে, গড় = $\frac{1950}{30}=65$

এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, গড় = $\frac{1984}{31}=64$.

অনুশীলনী ৫·২

১। x কে চলক ধরে $a^2x+b=0$ সমীকরণটির ঘাত নিচের কোনটি ?

ক. 3 খ. 2 গ. 1 ঘ. 0

২। নিচের কোনটি অভেদ ?

ক. $(x+1)^2+(x-1)^2=4x$ খ. $(x+1)^2+(x-1)^2=2(x^2+1)$

গ. $(a+b)^2-(a-b)^2=2ab$ ঘ. $(a-b)^2=a^2+2ab+b^2$

৩। $(x-4)^2=0$ সমীকরণের মূল কয়টি ?

ক. 1 টি খ. 2 টি গ. 3 টি ঘ. 4 টি

৪। $x^2-x-12=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় নিচের কোনটি ?

ক. $3, 4$ খ. $3, -4$ গ. $-3, 4$ ঘ. $-3, -4$

৫। $3x^2-x+5=0$ সমীকরণে x এর সহগ কত ?

ক. 3 খ. 2 গ. 1 ঘ. -1

৬। নিচের সমীকরণগুলো লক্ষ কর :

i. $2x+3=9$ *ii.* $\frac{x}{2}-2=-1$ *iii.* $2x+1=5$

উপরের কোন সমীকরণগুলো পরস্পর সমতুল ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

৭। $x^2-(a+b)x+ab=0$ সমীকরণের সমাধান সেট নিচের কোনটি ?

ক. $\{a, b\}$ খ. $\{a, -b\}$ গ. $\{-a, b\}$ ঘ. $\{-a, -b\}$

৮। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার দশক স্থানীয় অঙ্ক একক স্থানীয় অঙ্কের দ্বিগুণ। এই তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও ?

(১) একক স্থানীয় অঙ্ক x হলে, সংখ্যাটি কত ?

ক. $2x$ খ. $3x$ গ. $12x$ ঘ. $21x$

(২) অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে সংখ্যাটি কত হবে ?

ক. $3x$ খ. $4x$ গ. $12x$ ঘ. $21x$

(৩) $x=2$ হলে, মূল সংখ্যার সাথে স্থান বিনিময়কৃত সংখ্যার পার্থক্য কত ?

ক. 18 খ. 20 গ. 34 ঘ. 36

সমাধান কর (৯–১৮) :

৯। $(x+2)(x-\sqrt{3})=0$ ১০। $(\sqrt{2}x+3)(\sqrt{3}x-2)=0$ ১১। $y(y-5)=6$

১২। $(y+5)(y-5)=24$ ১৩। $2(z^2-9)+9z=0$ ১৪। $\frac{3}{2z+1}+\frac{4}{5z-1}=2$

১৫। $(z-10)(z+10)=21$ ১৬। $\frac{x-2}{x+2}+\frac{6(x-2)}{x-6}=1$ ১৭। $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{x}{b}+\frac{b}{x}$

১৮। $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

সমাধান সেট নির্ণয় কর (১৯–২৫):

১৯। $\frac{3}{x}+\frac{4}{x+1}=2$

২০। $\frac{x+7}{x+1}+\frac{2x+6}{2x+1}=5$

২১। $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x+a+b}$

২২। $\frac{ax+b}{a+bx}=\frac{cx+d}{c+dx}$

২৩। $x+\frac{1}{x}=2$

২৪। $2x^2-4ax=0$

২৫। $\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2}=2$

সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর (২৬–৩১) :

২৬। দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 15 এবং এদের গুণফল 56 ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

২৭। একটি আয়তাকার ঘরের মেঝের ক্ষেত্রফল 192 বর্গমিটার। মেঝের দৈর্ঘ্য 4 মিটার কমালে ও প্রস্থ 4 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে। মেঝের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

২৮। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য 15 সে.মি. ও অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের অন্তর 3 সে.মি.। ঐ বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২৯। একটি ত্রিভুজের ভূমি তার উচ্চতার দ্বিগুণ অপেক্ষা 6 সে.মি. বেশি। ত্রিভুজ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 810 বর্গ সে.মি. হলে, এর উচ্চতা কত ?

৩০। একটি শ্রেণিতে যতজন ছাত্র–ছাত্রী পড়ে প্রত্যেকে তার সহপাঠীর সংখ্যার সমান টাকা চাঁদা দেওয়ায় মোট 420 টাকা চাঁদা উঠল। ঐ শ্রেণির ছাত্র–ছাত্রীর সংখ্যা কত এবং প্রত্যেকে কত টাকা করে চাঁদা দিল ?

৩১। একটি শ্রেণিতে যতজন ছাত্র–ছাত্রী পড়ে, প্রত্যেকে তত পয়সার চেয়ে আরও 30 পয়সা বেশি করে চাঁদা দেওয়াতে মোট 70 টাকা উঠল। ঐ শ্রেণির ছাত্র–ছাত্রীর সংখ্যা কত ?

৩২। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 7 ; অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তা প্রদত্ত সংখ্যা থেকে 9 বেশি।

ক. চলক x এর মাধ্যমে প্রদত্ত সংখ্যাটি ও স্থান বিনিময়কৃত সংখ্যাটি লেখ।

খ. সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

গ. প্রদত্ত সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় যদি সেন্টিমিটারে কোনো আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্দেশ করে তবে ঐ আয়তক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। কর্ণটিকে কোনো বর্গের বাহু ধরে বর্গক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৩৩। একটি সমকোণী ত্রিভুজের ভূমি ও উচ্চতা যথাক্রমে $(x-1)$ সে.মি. ও x সে.মি. এবং একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য ত্রিভুজটির উচ্চতার সমান। আবার, একটি আয়তক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $(x+3)$ সে.মি. ও প্রস্থ x সে.মি.।

ক. একটিমাত্র চিত্রের মাধ্যমে তথ্যগুলো দেখাও।

খ. ত্রিভুজক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 10 বর্গ সে.মি. হলে, এর উচ্চতা কত ?

গ. ত্রিভুজক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র ও আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ধারাবাহিক অনুপাত বের কর।

ষষ্ঠ অধ্যায়

রেখা, কোণ ও ত্রিভুজ

Lines, Angles and Triangles

জ্যামিতি বা '*Geometry*' গণিত শাস্ত্রের একটি প্রাচীন শাখা। '*Geometry*' শব্দটি গ্রীক *Geo* - ভূমি (earth) ও *metrein* - পরিমাপ (measure) শব্দের সমন্বয়ে তৈরি। তাই 'জ্যামিতি' শব্দের অর্থ 'ভূমি পরিমাপ'। কৃষিভিত্তিক সভ্যতার যুগে ভূমি পরিমাপের প্রয়োজনেই জ্যামিতির সৃষ্টি হয়েছিল। তবে জ্যামিতি আজকাল কেবল ভূমি পরিমাপের জন্যই ব্যবহৃত হয় না, বরং বহু জটিল গাণিতিক সমস্যা সমাধানে জ্যামিতিক জ্ঞান এখন অপরিহার্য। প্রাচীন সভ্যতার নিদর্শনগুলোতে জ্যামিতি চর্চার প্রমাণ পাওয়া যায়। ঐতিহাসিকদের মতে প্রাচীন মিশরে আনুমানিক চার হাজার বছর আগেই ভূমি জরিপের কাজে জ্যামিতিক ধ্যান–ধারণা ব্যবহার করা হতো। প্রাচীন মিশর, ব্যাবিলন, ভারত, চীন ও ইনকা সভ্যতার বিভিন্ন ব্যবহারিক কাজে জ্যামিতির প্রয়োগের নিদর্শন রয়েছে। পাক–ভারত উপমহাদেশে সিন্ধু উপত্যকার সভ্যতায় জ্যামিতির বহুল ব্যবহার ছিল। হরপ্পা ও মহেঞ্জোদারোর খননে সুপরিকল্পিত নগরীর অস্তিত্বের প্রমাণ মেলে। শহরের রাস্তাগুলো ছিল সমান্তরাল এবং ভূগর্ভস্থ নিষ্কাসন ব্যবস্থা ছিল উন্নত। তাছাড়া ঘরবাড়ির আকার দেখে বুঝা যায় যে, শহরের অধিবাসীরা ভূমি পরিমাপেও দক্ষ ছিলেন। বৈদিক যুগে বেদি তৈরিতে নির্দিষ্ট জ্যামিতিক আকার ও ক্ষেত্রফল মেনে চলা হতো। এগুলো প্রধানত ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ ও ট্রাপিজিয়াম আকারের সমন্বয়ে গঠিত হতো।

তবে প্রাচীন গ্রীক সভ্যতার যুগেই জ্যামিতিক প্রণালীবদ্ধ রূপটি সুস্পষ্টভাবে লক্ষ করা যায়। গ্রীক গণিতবিদ থেলিসকে প্রথম জ্যামিতিক প্রমাণের কৃতিত্ব দেয়া হয়। তিনি যুক্তিমূলক প্রমাণ দেন যে, ব্যাস দ্বারা বৃত্ত সমদ্বিখণ্ডিত হয়। থেলিসের শিষ্য পিথাগোরাস জ্যামিতিক তত্ত্বের বিস্তৃতি ঘটান। আনুমানিক খ্রিস্টপূর্ব ৩০০ অব্দে গ্রীক পন্ডিত ইউক্লিড জ্যামিতির ইতস্তত বিক্ষিপ্ত সূত্রগুলোকে বিধিবদ্ধভাবে সুবিন্যস্ত করে তাঁর বিখ্যাত গ্রন্থ 'ইলিমেন্টস' রচনা করেন। তেরো খণ্ডে সম্পূর্ণ কালোত্তীর্ণ এই 'ইলিমেন্টস' গ্রন্থটিই আধুনিক জ্যামিতির ভিত্তিস্বরূপ। এই অধ্যায়ে ইউক্লিডের অনুসরণে যুক্তিমূলক জ্যামিতি আলোচনা করা হবে।

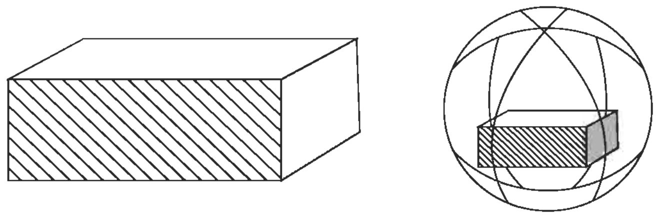
অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- ➢ সমতলীয় জ্যামিতির মৌলিক স্বীকার্যগুলো বর্ণনা করতে পারবে।
- ➢ ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ করতে পারবে।
- ➢ ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য ও অনুসিদ্ধান্তগুলো প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

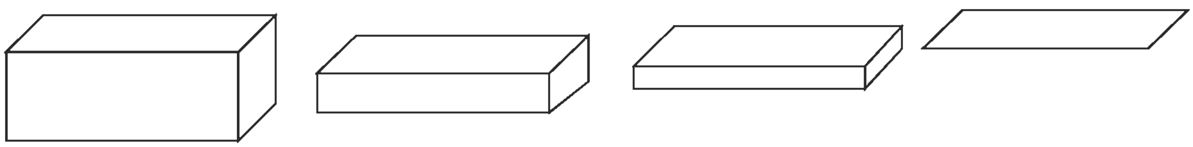
৬·১ স্থান, তল, রেখা ও বিন্দুর ধারণা

আমাদের চারপাশে বিস্তৃত জগত (*Space*) সীমাহীন। এর বিভিন্ন অংশ জুড়ে রয়েছে ছোট বড় নানা রকম বস্তু। ছোট বড় বস্তু বলতে বালুকণা, আলপিন, পেন্সিল, কাগজ, বই, চেয়ার, টেবিল, ইট, পাথর, বাড়িঘর, পাহাড়, পৃথিবী, গ্রহ–নক্ষত্র সবই বুঝান হয়। বিভিন্ন বস্তু স্থানের যে অংশ জুড়ে থাকে সে স্থানটুকুর আকার, আকৃতি, অবস্থান, বৈশিষ্ট্য প্রভৃতি থেকেই জ্যামিতিক ধ্যান–ধারণার উদ্ভব।

কোনো ঘনবস্তু (*Solid*) যে স্থান অধিকার করে থাকে, তা তিন দিকে বিস্তৃত। এ তিন দিকের বিস্তারেই বস্তুটির তিনটি মাত্রা (দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা) নির্দেশ করে। সেজন্য প্রত্যেক ঘনবস্তুই ত্রিমাত্রিক (*Three dimensional*)। যেমন, একটি ইট বা বাক্সের তিনটি মাত্রা (দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা) আছে। একটি গোলকের তিনটি মাত্রা আছে। এর তিন মাত্রার ভিন্নতা স্পষ্ট বুঝা না গেলেও একে দৈর্ঘ্য–প্রস্থ–উচ্চতা বিশিষ্ট খন্ডে বিভক্ত করা যায়।



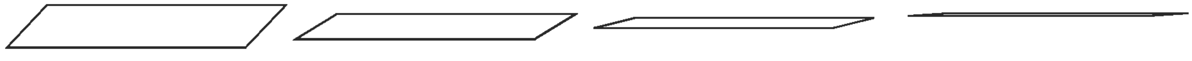
ঘনবস্তুর উপরিভাগ তল (*Surface*) নির্দেশ করে অর্থাৎ, প্রত্যেক ঘনবস্তু এক বা একাধিক তল দ্বারা সীমাবদ্ধ থাকে। যেমন, একটি বাক্সের ছয়টি পৃষ্ঠ ছয়টি সমতলের প্রতিরূপ। গোলকের উপরিভাগও একটি তল। তবে বাক্সের পৃষ্ঠতল ও গোলকের পৃষ্ঠ তল ভিন্ন প্রকারের। প্রথমটি সমতল (*Plane*), দ্বিতীয়টি বক্রতল (*Curved Surface*)।



তল দ্বিমাত্রিক (*Two – dimensional*) : এর শুধু দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে, কোনো উচ্চতা নাই। একটি বাক্সের দুইটি মাত্রা ঠিক রেখে তৃতীয় মাত্রা ক্রমশ হ্রাস করে শূন্যে পরিণত করলে, বাক্সটির পৃষ্ঠবিশেষ মাত্র অবশিষ্ট থাকে। এভাবে ঘনবস্তু থেকে তলের ধারণায় আসা যায়।

দুইটি তল পরস্পরকে ছেদ করলে একটি রেখা (*line*) উৎপন্ন হয়। যেমন, বাক্সের দুইটি পৃষ্ঠতল বাক্সের একধারে একটি রেখায় মিলিত হয়। এই রেখা একটি সরলরেখা (*straight line*)। একটি লেবুকে একটি পাতলা ছুরি দিয়ে কাটলে, ছুরির সমতল যেখানে লেবুর বক্রতলকে ছেদ করে সেখানে একটি বক্ররেখা (*curved line*) উৎপন্ন হয়।

রেখা একমাত্রিক (*one – dimensional* : এর শুধু দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ ও উচ্চতা নেই। বাক্সের একটি পৃষ্ঠ–তলের প্রস্থ ক্রমশ হ্রাস পেয়ে সম্পূর্ণ শূন্য হলে, ঐ তলের একটি রেখা মাত্র অবশিষ্ট থাকে। এভাবে তলের ধারণা থেকে রেখার ধারণায় আসা যায়।



দুইটি রেখা পরস্পর ছেদ করলে বিন্দুর উৎপত্তি হয়। অর্থাৎ, দুইটি রেখার ছেদস্থান বিন্দু (*point*) দ্বারা নির্দিষ্ট হয়। বাক্সের দুইটি ধার যেমন, বাক্সের এক কোণায় একটি বিন্দুতে মিলিত হয়।

বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নাই, শুধু অবস্থান আছে। একটি রেখার দৈর্ঘ্য ক্রমশ হ্রাস পেলে অবশেষে একটি বিন্দুতে পর্যবসিত হয়। বিন্দুকে শূন্য মাত্রার সত্তা (*entity*) বলে গণ্য করা হয়।

৬·২ ইউক্লিডের স্বীকার্য

উপরে তল, রেখা ও বিন্দু সম্পর্কে যে ধারণা দেওয়া হলো, তা তল, রেখা ও বিন্দুর সংজ্ঞা নয়– বর্ণনা মাত্র। এই বর্ণনায় মাত্রা বলতে দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা ইত্যাদি ধারণা ব্যবহার করা হয়েছে, যেগুলো সংজ্ঞায়িত নয়। ইউক্লিড তাঁর 'ইলিমেন্টস' গ্রন্থের প্রথম খণ্ডের শুরুতেই বিন্দু, রেখা ও তলের যে 'সংজ্ঞা' উল্লেখ করেছেন তা–ও আধুনিক দৃষ্টিভঙ্গি অনুসারে অসম্পূর্ণ। ইউক্লিড প্রদত্ত কয়েকটি বর্ণনা নিম্নরূপ :

(১) যার কোনো অংশ নাই, তাই বিন্দু।

(২) রেখার প্রান্ত বিন্দু নেই।

(৩) যার কেবল দৈর্ঘ্য আছে, কিন্তু প্রস্থ ও উচ্চতা নাই, তাই রেখা।

(৪) যে রেখার উপরিস্থিত বিন্দুগুলো একই বরাবরে থাকে, তাই সরলরেখা।

(৫) যার কেবল দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে, তাই তল।

(৬) তলের প্রান্ত হলো রেখা।

(৭) যে তলের সরলরেখাগুলো তার ওপর সমভাবে থাকে, তাই সমতল।

লক্ষ করলে দেখা যায় যে, এই বর্ণনায় অংশ, দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, সমভাবে ইত্যাদি শব্দগুলো অসংজ্ঞায়িতভাবে গ্রহণ করা হয়েছে। ধরে নেয়া হয়েছে যে, এগুলো সম্পর্কে আমাদের প্রাথমিক ধারণা রয়েছে। এসব ধারণার উপর ভিত্তি করে বিন্দু, সরলরেখা ও সমতলের ধারণা দেওয়া হয়েছে। বাস্তবিক পক্ষে, যেকোনো গাণিতিক আলোচনায় এক বা একাধিক প্রাথমিক ধারণা স্বীকার করে নিতে হয়। ইউক্লিড এগুলোকে স্বতঃসিদ্ধ (*Axioms*) বলে আখ্যায়িত করেন। ইউক্লিড প্রদত্ত কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ :

১। যেসকল বস্তু একই বস্তুর সমান, সেগুলো পরস্পর সমান।

২। সমান সমান বস্তুর সাথে সমান বস্তু যোগ করা হলে যোগফল সমান।

৩। সমান সমান বস্তু থেকে সমান বস্তু বিয়োগ করা হলে বিয়োগফল সমান।

৪। যা পরস্পরের সাথে মিলে যায়, তা পরস্পর সমান।

৫। পূর্ণ তার অংশের চেয়ে বড়।

আধুনিক জ্যামিতিতে বিন্দু, সরলরেখা ও সমতলকে প্রাথমিক ধারণা হিসেবে গ্রহণ করে তাদের কিছু বৈশিষ্ট্যকে স্বীকার করে নেওয়া হয়। এই স্বীকৃত বৈশিষ্ট্যগুলোকে জ্যামিতিক স্বীকার্য (*postulate*) বলা হয়। বাস্তব ধারণার সঙ্গে সঙ্গতি রেখেই এই স্বীকার্যসমূহ নির্ধারণ করা হয়েছে। ইউক্লিড প্রদত্ত পাঁচটি স্বীকার্য হলো :

স্বীকার্য ১। একটি বিন্দু থেকে অন্য একটি বিন্দু পর্যন্ত একটি সরলরেখা আঁকা যায়।

স্বীকার্য ২। খণ্ডিত রেখাকে যথেচ্ছভাবে বাড়ানো যায়।

স্বীকার্য ৩। যেকোনো কেন্দ্র ও যেকোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকা যায়।

স্বীকার্য ৪। সকল সমকোণ পরস্পর সমান।

স্বীকার্য ৫। একটি সরলরেখা দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করলে এবং ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের চেয়ে কম হলে, রেখা দুইটিকে যথেচ্ছভাবে বর্ধিত করলে যেদিকে কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের চেয়ে কম, সেদিকে মিলিত হয়।

ইউক্লিড সংজ্ঞা, স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্যগুলোর সাহায্যে যুক্তিমূলক নতুন প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করেন। তিনি সংজ্ঞা, স্বতঃসিদ্ধ, স্বীকার্য ও প্রমাণিত প্রতিজ্ঞার সাহায্যে আবার নতুন একটি প্রতিজ্ঞাও প্রমাণ করেন। ইউক্লিড তার 'ইলিমেন্টস' গ্রন্থে মোট ৪৬৫টি শৃঙ্খলাবন্ধ প্রতিজ্ঞার প্রমাণ দিয়েছেন যা আধুনিক যুক্তিমূলক জ্যামিতির ভিত্তি।

লক্ষ করি যে, ইউক্লিডের প্রথম স্বীকার্যে কিছু অসম্পূর্ণতা রয়েছে। দুইটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে যে একটি অনন্য সরলরেখা অঙ্কন করা যায় তা উপেক্ষিত হয়েছে। পঞ্চম স্বীকার্য অন্য চারটি স্বীকার্যের চেয়ে জটিল। অন্যদিকে, প্রথম থেকে চতুর্থ স্বীকার্যগুলো এতো সহজ যে এগুলো 'স্পষ্টই সত্য' বলে প্রতীয়মান হয়। কিন্তু এগুলো প্রমাণ করা যায় না। সুতরাং, উক্তিগুলো 'প্রমাণবিহীন সত্য' বা স্বীকার্য বলে মেনে নেয়া হয়। পঞ্চম স্বীকার্যটি সমান্তরাল সরলরেখার সাথে জড়িত বিধায় পরবর্তীতে আলোচনা করা হবে।

৬·৩ সমতল জ্যামিতি

পূর্বেই বিন্দু, সরলরেখা ও সমতল জ্যামিতির তিনটি প্রাথমিক ধারণা উলেখ করা হয়েছে। এদের যথাযথ সংজ্ঞা দেওয়া সম্ভব না হলেও এদের সম্পর্কে আমাদের বাস্তব অভিজ্ঞতাপ্রসূত ধারণা হয়েছে। বিমূর্ত জ্যামিতিক ধারণা হিসেবে স্থানকে বিন্দুসমূহের সেট ধরা হয় এবং সরলরেখা ও সমতলকে এই সার্বিক সেটের উপসেট বিবেচনা করা হয়। অর্থাৎ,

স্বীকার্য ১। জগত $(Space)$ সকল বিন্দুর সেট এবং সমতল ও সরলরেখা এই সেটের উপসেট।

এই স্বীকার্য থেকে আমরা লক্ষ করি যে, প্রত্যেক সমতল ও প্রত্যেক সরলরেখা এক একটি সেট, যার উপাদান হচ্ছে বিন্দু। জ্যামিতিক বর্ণনায় সাধারণত সেট প্রতীকের ব্যবহার পরিহার করা হয়। যেমন, কোনো বিন্দু একটি সরলরেখার (বা সমতলের) অন্তর্ভুক্ত হলে বিন্দুটি ঐ সরলরেখায় (বা সমতলে) অবস্থিত অথবা, সরলরেখাটি (বা সমতলটি) ঐ বিন্দু দিয়ে যায়। একইভাবে, একটি সরলরেখা একটি সমতলের উপসেট হলে সরলরেখাটি ঐ সমতলে অবস্থিত, অথবা, সমতলটি ঐ সরলরেখা দিয়ে যায় এ রকম বাক্য দ্বারা তা বর্ণনা করা হয়।

সরলরেখা ও সমতলের বৈশিষ্ট্য হিসেবে স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য ২। দুইটি ভিন্ন বিন্দুর জন্য একটি ও কেবল একটি সরলরেখা আছে, যাতে উভয় বিন্দু অবস্থিত।

স্বীকার্য ৩। একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় এমন তিনটি ভিন্ন ভিন্ন বিন্দুর জন্য একটি ও কেবল একটি সমতল আছে, যাতে বিন্দু তিনটি অবস্থিত।

স্বীকার্য ৪। কোনো সমতলের দুইটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে যায় এমন সরলরেখা ঐ সমতলে অবস্থিত।

স্বীকার্য ৫। (ক) জগতে $(Space)$ একাধিক সমতল বিদ্যমান।

(খ) প্রত্যেক সমতলে একাধিক সরলরেখা অবস্থিত।

(গ) প্রত্যেক সরলরেখার বিন্দুসমূহ এবং বাস্তব সংখ্যাসমূহকে এমনভাবে সম্পর্কিত করা যায় যেন, রেখাটির প্রত্যেক বিন্দুর সঙ্গে একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয় এবং প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যার সঙ্গে রেখাটির একটি অনন্য বিন্দু সংশ্লিষ্ট হয়।

মন্তব্য : স্বীকার্য ১ থেকে স্বীকার্য ৫ কে আপতন স্বীকার্য (Incidence axiom) বলা হয়।

জ্যামিতিতে দূরত্বের ধারণাও একটি প্রাথমিক ধারণা। এ জন্য স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য ৬। (ক) P ও Q বিন্দুযুগল একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা নির্দিষ্ট করে থাকে। সংখ্যাটিকে P বিন্দু থেকে Q বিন্দুর দূরত্ব বলা হয় এবং PQ দ্বারা সূচিত করা হয়।

(খ) P ও Q ভিন্ন বিন্দু হলে PQ সংখ্যাটি ধনাত্মক। অন্যথায়, $PQ = 0$।

(গ) P থেকে Q এর দূরত্ব এবং Q থেকে P এর দূরত্ব একই। অর্থাৎ $PQ = QP$।

$PQ = QP$ হওয়াতে এই দূরত্বকে সাধারণত P বিন্দু ও Q বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব বলা হয়। ব্যবহারিকভাবে, এই দূরত্ব পূর্ব নির্ধারিত এককের সাহায্যে পরিমাপ করা হয়।

স্বীকার্য ৫ (গ) অনুযায়ী প্রত্যেক সরলরেখায় অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট ও বাস্তব সংখ্যার সেটের মধ্যে এক–এক মিল স্থাপন করা যায়। এ প্রসঙ্গে স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য ৭। কোনো সরলরেখায় অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট এবং বাস্তব সংখ্যার সেটের মধ্যে এমনভাবে এক–এক মিল স্থাপন করা যায়, যেন রেখাটির যেকোনো বিন্দু P, Q এর জন্য $PQ = |a - b|$ হয়, যেখানে মিলকরণের ফলে P ও Q এর সঙ্গে যথাক্রমে a ও b বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয়।

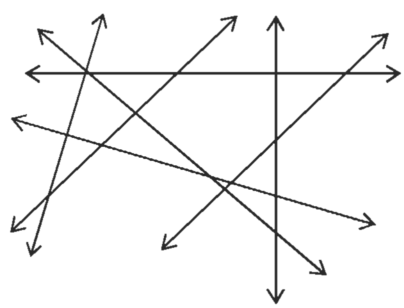
এই স্বীকার্যে বর্ণিত মিলকরণ করা হলে, রেখাটি একটি সংখ্যারেখায় পরিণত হয়েছে বলা হয়। সংখ্যারেখায় P বিন্দুর সঙ্গে a সংখ্যাটি সংশ্লিষ্ট হলে P কে a এর লেখবিন্দু এবং a কে P এর স্থানাঙ্ক বলা হয়। কোনো সরলরেখাকে সংখ্যারেখায় পরিণত করার জন্য প্রথমে রেখাটির একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক 0 এবং অপর একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক 1 ধরে নেওয়া হয়। এতে রেখাটিতে একটি একক দূরত্ব এবং একটি ধনাত্মক দিক নির্দিষ্ট হয়। এ জন্য স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য ৮। যেকোনো সরলরেখা AB কে এমনভাবে সংখ্যারেখায় পরিণত করা যায় যে, A এর স্থানাঙ্ক O এবং B এর স্থানাঙ্ক ধনাত্মক হয়।

মন্তব্য : স্বীকার্য ৬ কে দূরত্ব স্বীকার্য, স্বীকার্য ৭ কে রূলার স্বীকার্য এবং স্বীকার্য ৮ কে রূলার স্থাপন স্বীকার্য বলা হয়।

জ্যামিতিক বর্ণনাকে স্পষ্ট করার জন্য চিত্র ব্যবহার করা হয়। কাগজের ওপর পেন্সিল বা কলমের সূক্ষ্ম ফোঁটা দিয়ে বিন্দুর প্রতিরূপ আঁকা হয়। সোজা রূলার বরাবর দাগ টেনে সরলরেখার প্রতিরূপ আঁকা হয়। সরলরেখার চিত্রে দুই দিকে তীরচিহ্ন দিয়ে বুঝানো হয় যে, রেখাটি উভয়দিকে সীমাহীনভাবে বিস্তৃত। স্বীকার্য ২ অনুযায়ী দুইটি ভিন্ন বিন্দু A ও B একটি অনন্য সরলরেখা নির্দিষ্ট করে যাতে বিন্দু দুইটি অবস্থিত হয়। এই রেখাকে AB রেখা বা BA রেখা বলা হয়। স্বীকার্য ৫ (গ) অনুযায়ী এরূপ প্রত্যেক সরলরেখা অসংখ্য বিন্দু ধারণ করে।

স্বীকার্য (৫) (ক) অনুযায়ী একাধিক সমতল বিদ্যমান। এরূপ প্রত্যেক সমতলে অসংখ্য সরলরেখা রয়েছে। জ্যামিতির যে শাখায় একই সমতলে অবস্থিত বিন্দু, রেখা এবং তাদের সঙ্গে সম্পর্কিত বিভিন্ন জ্যামিতিক সত্তা সম্পর্কে আলোচনা করা হয়, তাকে সমতল জ্যামিতি (*Plane Geometry*) বলা হয়। এ পুস্তকে সমতল জ্যামিতিই আমাদের মূল বিবেচ্য বিষয়। সুতরাং, বিশেষ কোনো উল্লেখ না থাকলে বুঝতে হবে যে, আলোচ্য সকল বিন্দু, রেখা ইত্যাদি একই সমতলে অবস্থিত। এরূপ একটি নির্দিষ্ট সমতলই আলোচনার সার্বিক সেট।



গাণিতিক উক্তির প্রমাণ

যেকোনো গাণিতিক তত্ত্বে কতিপয় প্রাথমিক ধারণা, সংজ্ঞা এবং স্বীকার্যের উপর ভিত্তি করে ধাপে ধাপে ঐ তত্ত্ব সম্পর্কিত বিভিন্ন উক্তি যৌক্তিকভাবে প্রমাণ করা হয়। এরূপ উক্তিকে সাধারণত প্রতিজ্ঞা বলা হয়। প্রতিজ্ঞার যৌক্তিকতা প্রমাণের জন্য যুক্তিবিদ্যার কিছু নিয়ম প্রয়োগ করা হয়। যেমন,

(ক) আরোহ পদ্ধতি (Mathematical Induction)

(খ) অবরোহ পদ্ধতি (Mathematical Deduction)

(গ) বিরোধ পদ্ধতি ইত্যাদি।

বিরোধ পদ্ধতি *(Proof by contradiction)*

দার্শনিক এরিস্টটল যুক্তিমূলক প্রমাণের এ পদ্ধতিটির সূচনা করেন। এ পদ্ধতির ভিত্তি হলো:

– একই গুণকে একই সময় স্বীকার ও অস্বীকার করা যায় না।

– একই জিনিসের দুইটি পরস্পরবিরোধী গুণ থাকতে পারে না।

– যা পরস্পরবিরোধী তা অচিন্ত্যনীয়।

– কোনো বস্তু এক সময়ে যে গুণের অধিকারী হয়, সেই বস্তু সেই একই সময়ে সেই গুণের অনধিকারী হতে পারে না।

৬·৪ জ্যামিতিক প্রমাণ

জ্যামিতিতে কতকগুলো প্রতিজ্ঞাকে বিশেষ গুরুত্ব দিয়ে উপপাদ্য হিসেবে গ্রহণ করা হয় এবং অন্যান্য প্রতিজ্ঞা প্রমাণে ক্রম অনুযায়ী এদের ব্যবহার করা হয়। জ্যামিতিক প্রমাণে বিভিন্ন তথ্য চিত্রের সাহায্যে বর্ণনা করা হয়। তবে প্রমাণ অবশ্যই যুক্তিনির্ভর হতে হবে।

জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞার বর্ণনায় সাধারণ নির্বচন (*general enunciation*) অথবা বিশেষ নির্বচন (*particular enunciation*) ব্যবহার করা হয়। সাধারণ নির্বচন হচ্ছে চিত্রনিরপেক্ষ বর্ণনা আর বিশেষ নির্বচন হচ্ছে চিত্রনির্ভর বর্ণনা। কোনো প্রতিজ্ঞার সাধারণ নির্বচন দেওয়া থাকলে প্রতিজ্ঞার বিষয়বস্তু বিশেষ নির্বচনের মাধ্যমে নির্দিষ্ট করা হয়। এ জন্য প্রয়োজনীয় চিত্র অঙ্কন করতে হয়। জ্যামিতিক উপপাদ্যের প্রমাণে সাধারণত নিম্নোক্ত ধাপগুলো থাকে :

(১) সাধারণ নির্বচন

(২) চিত্র ও বিশেষ নির্বচন

(৩) প্রয়োজনীয় অঙ্কনের বর্ণনা এবং

(৪) প্রমাণের যৌক্তিক ধাপগুলোর বর্ণনা।

যদি কোনো প্রতিজ্ঞা সরাসরিভাবে একটি উপাপাদ্যের সিদ্ধান্ত থেকে প্রমাণিত হয়, তবে তাকে অনেক সময় ঐ উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত (*Corollary*) হিসেবে উল্লেখ করা যায়। বিভিন্ন প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করা ছাড়াও জ্যামিতিতে বিভিন্ন চিত্র অঙ্কন করার প্রস্তাবনা বিবেচনা করা হয়। এগুলোকে সম্পাদ্য বলা হয়। সম্পাদ্য বিষয়ক চিত্র অঙ্কন করে চিত্রাঙ্কনের বর্ণনা ও যৌক্তিকতা উল্লেখ করতে হয়।

অনুশীলনী ৬.১

১। স্থান, তল, রেখা এবং বিন্দুর ধারণা দাও।

২। ইউক্লিডের পাঁচটি স্বীকার্য বর্ণনা কর।

৩। পাঁচটি আপতন স্বীকার্য বর্ণনা কর।

৪। দূরত্ব স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

৫। রুলার স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

৬। সংখ্যারেখা বর্ণনা কর।

৭। রুলার স্থাপন স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

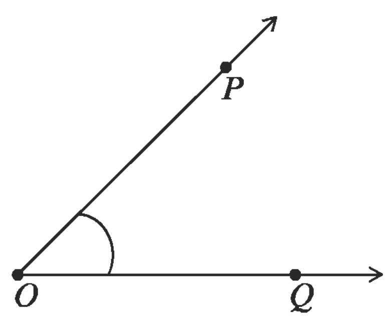
৮। পরস্পরছেদী সরলরেখা ও সমান্তরাল সরলরেখার সংজ্ঞা দাও।

রেখা, রশ্মি, রেখাংশ

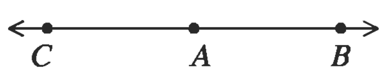
সমতলীয় জ্যামিতির স্বীকার্য অনুযায়ী সমতলে সরলরেখা বিদ্যমান যার প্রতিটি বিন্দু সমতলে অবস্থিত। মনে করি, সমতলে AB একটি সরলরেখা এবং রেখাটির উপর অবস্থিত একটি বিন্দু C। C বিন্দুকে A ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী বলা হয় যদি A, C ও B একই সরলরেখার ভিন্ন ভিন্ন বিন্দু হয় এবং $AC+CB = AB$ হয়। A, C ও B বিন্দু তিনটিকে সমরেখ বিন্দুও বলা হয়। A ও B এবং এদের অন্তর্বর্তী সকল বিন্দুর সেটকে A ও B বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ বা সংক্ষেপে AB রেখাংশ বলা হয়। A ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী প্রত্যেক বিন্দুকে রেখাংশের অন্তঃস্থ বিন্দু বলা হয়।

কোণ

সমতলে দুইটি রশ্মির প্রান্তবিন্দু একই হলে কোণ তৈরি হয়। রশ্মি দুইটিকে কোণের বাহু এবং তাদের সাধারণ বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলে। চিত্রে, OP ও OQ রশ্মিদ্বয় তাদের সাধারণ প্রান্তবিন্দু O তে $\angle POQ$ উৎপন্ন করেছে। O বিন্দুটি $\angle POQ$ এর শীর্ষবিন্দু। OP এর যে পার্শ্বে Q আছে সেই পার্শ্বে এবং OQ এর যে পার্শ্বে P আছে সেই পার্শ্বে অবস্থিত সকল বিন্দুর সেটকে $\angle POQ$ এর অভ্যন্তর বলা হয়। কোণটির অভ্যন্তরে অথবা কোনো বাহুতে অবস্থিত নয় এমন সকল বিন্দুর সেটকে এর বহির্ভাগ বলা হয়।

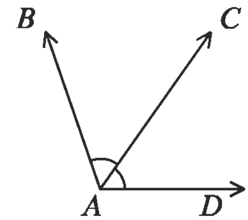


সরল কোণ



দুইটি পরস্পর বিপরীত রশ্মি তাদের সাধারণ প্রান্তবিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাকে সরল কোণ বলে। পাশের চিত্রে, AB রশ্মির প্রান্তবিন্দু A থেকে AB এর বিপরীত দিকে AC রশ্মি আঁকা হয়েছে। AC ও AB রশ্মিদ্বয় তাদের সাধারণ প্রান্তবিন্দু A তে $\angle BAC$ উৎপন্ন করেছে। $\angle BAC$ কে সরল কোণ বলে। সরল কোণের পরিমাপ দুই সমকোণ বা ১৮০°।

সন্নিহিত কোণ

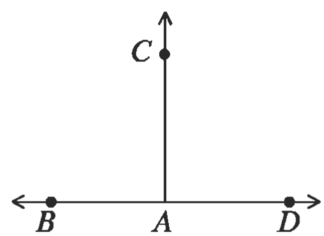


যদি সমতলে দুইটি কোণের একই শীর্ষবিন্দু হয় ও তাদের একটি সাধারণ রশ্মি থাকে এবং কোণদ্বয় সাধারণ রশ্মির বিপরীত পাশে অবস্থান করে, তবে ঐ কোণদ্বয়কে সন্নিহিত কোণ বলে।

পাশের চিত্রে, A বিন্দুটি $\angle BAC$ ও $\angle CAD$ এর শীর্ষবিন্দু।

A বিন্দু $\angle BAC$ ও $\angle CAD$ উৎপন্নকারী রশ্মিগুলোর মধ্যে AC সাধারণ রশ্মি । কোণ দুইটি সাধারণ রশ্মি AC এর বিপরীত পাশে অবস্থিত। $\angle BAC$ এবং $\angle CAD$ পরস্পর সন্নিহিত কোণ।

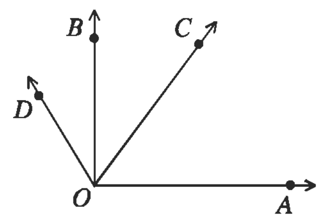
লম্ব, সমকোণ



BD একটি সরলরেখা; A উক্ত রেখাস্থ একটি বিন্দু এবং AC একটি রশ্মি। ফলে $\angle BAC$ এবং $\angle DAC$ দুইটি সন্নিহিত কোণ। এরা পরস্পর সমান হলে এদের প্রত্যেককে সমকোণ এবং AC ও BD রেখাকে পরস্পর লম্ব বলা হয়।

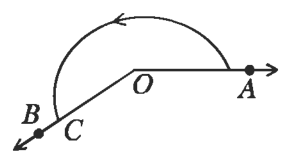
সুতরাং কোনো রেখাংশের লম্ব–দ্বিখন্ডক দ্বারা উৎপন্ন সন্নিহিত কোণ দুইটি প্রত্যেকে সমকোণ।

সূক্ষ্মকোণ ও স্থূলকোণ



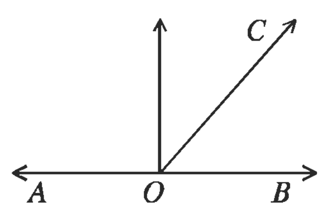
এক সমকোণ থেকে ছোট কোণকে সূক্ষ্মকোণ এবং এক সমকোণ থেকে বড় কিন্তু দুই সমকোণ থেকে ছোট কোণকে স্থূলকোণ বলা হয়। চিত্রে $\angle AOC$ সূক্ষ্মকোণ এবং $\angle AOD$ স্থূলকোণ। এখানে $\angle AOB$ এক সমকোণ।

প্রবৃদ্ধ কোণ



দুই সমকোণ থেকে বড় কিন্তু চার সমকোণ থেকে ছোট কোণকে প্রবৃদ্ধকোণ বলা হয়। চিত্রে চিহ্নিত $\angle AOC$ প্রবৃদ্ধকোণ।

পূরক কোণ

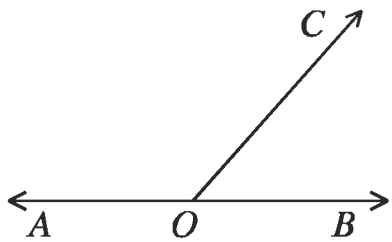


দুইটি কোণের পরিমাপের যোগফল 1 সমকোণ হলে কোণ দুইটির একটি অপরটির পূরক কোণ।

পাশের চিত্রে, $\angle AOB$ একটি সমকোণ। OC রশ্মি কোণটির বাহুদ্বয়ের অভ্যন্তরে অবস্থিত। এর ফলে $\angle AOC$ এবং $\angle COB$ এই দুইটি কোণ উৎপন্ন হলো। কোণ দুইটির পরিমাপের যোগফল $\angle AOB$ এর পরিমাপের সমান, অর্থাৎ 1 সমকোণ। $\angle AOC$ এবং $\angle COB$ পরস্পর পূরক কোণ।

সম্পূরক কোণ

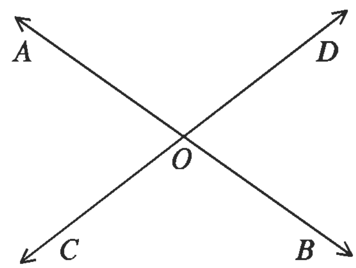
দুইটি কোণের পরিমাপের যোগফল 2 সমকোণ হলে কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক কোণ।



AB একটি সরলরেখার O অন্তঃস্থ একটি বিন্দু। OC একটি রশ্মি যা OA রশ্মি ও OB রশ্মি থেকে ভিন্ন। এর ফলে $\angle AOC$ এবং $\angle COB$ এই দুইটি কোণ উৎপন্ন হলো। কোণ দুইটির পরিমাপের যোগফল $\angle AOB$ কোণের পরিমাপের সমান, অর্থাৎ 2 সমকোণ, কেননা $\angle AOB$ একটি সরলকোণ। $\angle AOC$ এবং $\angle COB$ পরস্পর সম্পূরক কোণ।

বিপ্রতীপ কোণ

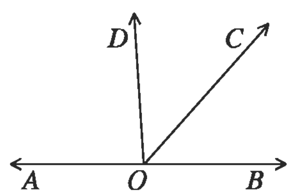
কোনো কোণের বাহুদ্বয়ের বিপরীত রশ্মিদ্বয় যে কোণ তৈরি করে তা ঐ কোণের বিপ্রতীপ কোণ।



চিত্রে OA ও OB পরস্পর বিপরীত রশ্মি। আবার OC ও OD পরস্পর বিপরীত রশ্মি। $\angle BOD$ ও $\angle AOC$ পরস্পর বিপ্রতীপ কোণ। আবার $\angle BOC$ ও $\angle DOA$ একটি অপরটির বিপ্রতীপ কোণ। দুইটি সরলরেখা কোনো বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করলে, ছেদ বিন্দুতে দুই জোড়া বিপ্রতীপ কোণ উৎপন্ন হয়।

উপপাদ্য ১

একটি সরলরেখার একটি বিন্দুতে অপর একটি রশ্মি মিলিত হলে, যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয় তাদের সমষ্টি দুই সমকোণ।



মনে করি, AB সরলরেখাটির O বিন্দুতে OC রশ্মির প্রান্তবিন্দু O মিলিত হয়েছে। ফলে $\angle AOC$ ও $\angle COB$ দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হল। AB রেখার উপর DO লম্ব আঁকি।

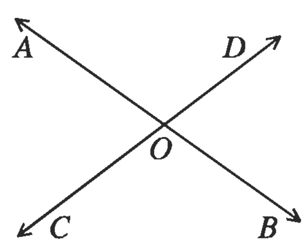
সন্নিহিত কোণদ্বয়ের সমষ্টি $= \angle AOC + \angle COB$

$= \angle AOD + \angle DOC + \angle COB$

$= \angle AOD + \angle DOB =$ ২ সমকোণ ।

উপপাদ্য ২

দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করলে, উৎপন্ন বিপ্রতীপ কোণগুলো পরস্পর সমান।

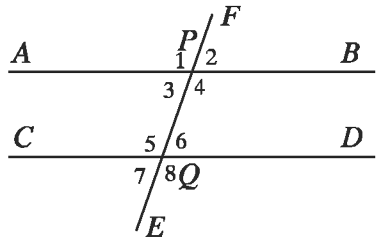


মনে করি, AB ও CD রেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। ফলে O বিন্দুতে $\angle AOC$, $\angle COB$, $\angle BOD$, $\angle AOD$ কোণ উৎপন্ন হয়েছে।

$\angle AOC =$ বিপ্রতীপ $\angle BOD$ এবং $\angle COB =$ বিপ্রতীপ $\angle AOD$ ।

৬·৪ সমান্তরাল সরলরেখা

একান্তর কোণ, অনুরূপ কোণ, ছেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃস্থ কোণ



উপরের চিত্রে, AB ও CD দুইটি সরলরেখা এবং EF সরলরেখা এদেরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। EF সরলরেখা AB ও CD সরলরেখাদ্বয়ের ছেদক। ছেদকটি AB ও CD সরলরেখা দুইটির সাথে $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7, \angle 8$ মোট আটটি কোণ তৈরি করেছে। এ কোণগুলোর মধ্যে

(ক) $\angle 1$ এবং $\angle 5$, $\angle 2$ এবং $\angle 6$, $\angle 3$ এবং $\angle 7$, $\angle 4$ এবং $\angle 8$ পরস্পর অনুরূপ কোণ।

(খ) $\angle 3$ এবং $\angle 6$, $\angle 4$ এবং $\angle 5$ হলো পরস্পর একান্তর কোণ

(গ) $\angle 4$, $\angle 6$ ডানপাশের অন্তঃস্থ কোণ।

(ঘ) $\angle 3$, $\angle 5$ বামপাশের অন্তঃস্থ কোণ।

সমতলে দুইটি সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ করতে পারে অথবা তারা সমান্তরাল। সরলরেখাদ্বয় পরস্পরছেদী হয়, যদি উভয়রেখায় অবস্থিত একটি সাধারণ বিন্দু থাকে। অন্যথায় সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল। লক্ষণীয় যে, দুইটি ভিন্ন সরলরেখার সর্বাধিক একটি সাধারণ বিন্দু থাকতে পারে।

একই সমতলে অবস্থিত দুইটি সরলরেখার সমান্তরালতা নিম্নেবর্ণিত তিনভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়:

(ক) সরলরেখা দুইটি কখনও পরস্পরকে ছেদ করে না (দুই দিকে অসীম পর্যন্ত বর্ধিত করা হলেও)।

(খ) একটি সরলরেখার প্রতিটি বিন্দু অপরটি থেকে সমান ক্ষুদ্রতম দূরত্বে অবস্থান করে।

(গ) সরলরেখা দুইটিকে অপর একটি সরলরেখা ছেদ করলে যদি একান্তর কোণ বা অনুরূপ কোণগুলো সমান হয়।

সংজ্ঞা (ক) অনুসারে একই সমতলে অবস্থিত দুইটি সরলরেখা একে অপরকে ছেদ না করলে সেগুলো সমান্তরাল। দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা থেকে যেকোনো দুইটি রেখাংশ নিলে, রেখাংশ দুইটিও পরস্পর সমান্তরাল হয়।

সংজ্ঞা (খ) অনুসারে দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার একটির যেকোনো বিন্দু থেকে অপরটির লম্ব–দূরত্ব সর্বদা সমান। লম্ব–দূরত্ব বলতে তাদের একটির যেকোনো বিন্দু হতে অপরটির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যকেই বুঝায়। আবার বিপরীতভাবে, দুইটি সরলরেখার একটির যেকোনো দুইটি বিন্দু থেকে অপরটির লম্ব–দূরত্ব পরস্পর সমান হলেও রেখাদ্বয় সমান্তরাল। এই লম্ব–দূরত্বকে সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের দূরত্ব বলা হয়।

সংজ্ঞা (গ) ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্যের সমতুল্য। জ্যামিতিক প্রমাণ ও অঙ্কনের জন্য এ সংজ্ঞাটি অধিকতর উপযোগী।

লক্ষ করি, কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অবস্থিত নয় এরূপ বিন্দুর মধ্য দিয়ে ঐ সরলরেখার সমান্তরাল করে একটি মাত্র সরলরেখা আঁকা যায়।

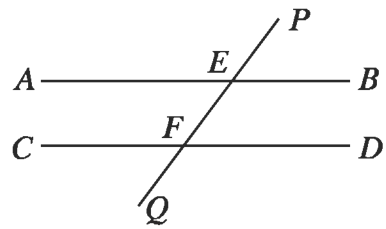
উপপাদ্য ৩

দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার একটি ছেদক দ্বারা উৎপন্ন

(ক) প্রত্যেক জোড়া অনুরূপ কোণ সমান হবে।

(খ) প্রত্যেক জোড়া একান্তর কোণ সমান হবে।

(গ) ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক।



চিত্রে, $AB \parallel CD$ এবং PQ ছেদক তাদের যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে।

সুতরাং, (ক) $\angle PEB$ = অনুরূপ $\angle EFD$ [সংজ্ঞানুসারে]

(খ) $\angle AEF$ = একান্তর $\angle EFD$

(গ) $\angle BEF + \angle EFD$ = দুই সমকোণ।

কাজ :

১। সমান্তরাল সরলরেখার বিকল্প সংজ্ঞার সাহায্যে সমান্তরাল সরলরেখা সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ কর।

উপপাদ্য ৪

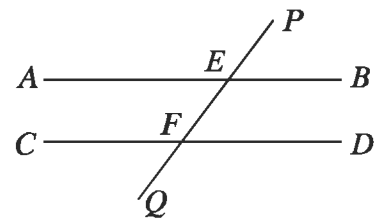
দুইটি সরলরেখা অপর একটি সরলরেখাকে ছেদ করলে যদি

(ক) অনুরূপ কোণগুলো পরস্পর সমান হয়, অথবা

(খ) একান্তর কোণগুলো পরস্পর সমান হয়, অথবা

(গ) ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের যোগফল দুই সমকোণের সমান হয়,

তবে ঐ সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।



চিত্রে, AB ও CD রেখাদ্বয়কে PQ রেখা যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং

(ক) $\angle PEB$ = অনুরূপ $\angle EFD$

অথবা, (খ) $\angle AEF$ = একান্তর $\angle EFD$

অথবা, (গ) $\angle BEF + \angle EFD$ = দুই সমকোণ।

সুতরাং, AB ও CD রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।

অনুসিদ্ধান্ত ১। যেসব সরলরেখা একই সরলরেখার সমান্তরাল সেগুলো পরস্পর সমান্তরাল।

অনুশীলনী ৬.২

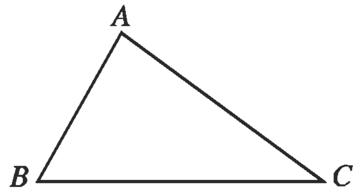
১। কোণের অভ্যন্তর ও বহির্ভাগের সংজ্ঞা দাও।

২। যদি একই সরলরেখাস্থ তিনটি ভিন্ন বিন্দু হয়, তবে চিত্রের উৎপন্ন কোণগুলোর নামকরণ কর।

৩। সন্নিহিত কোণের সংজ্ঞা দাও এবং এর বাহুগুলো চিহ্নিত কর।

৪। চিত্রসহ সংজ্ঞা দাও: বিপ্রতীপ কোণ, পূরক কোণ, সম্পূরক কোণ, সমকোণ, সূক্ষ্মকোণ এবং স্থূলকোণ।

ত্রিভুজ



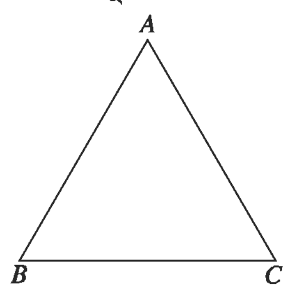
তিনটি রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্র একটি ত্রিভুজ। রেখাংশগুলোকে ত্রিভুজের বাহু বলে। যেকোনো দুইটি বাহুর সাধারণ বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলা হয়। *ত্রি*ভুজের যেকোনো দুইটি বাহু শীর্ষবিন্দুতে কোণ উৎপন্ন করে। ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ রয়েছে। বাহুভেদে ত্রিভুজ তিন প্রকার : সমবাহু, সমদ্বিবাহু ও বিষমবাহু। আবার কোণভেদেও ত্রিভুজ তিন প্রকার : সূক্ষ্মকোণী, স্থূলকোণী ও সমকোণী।

ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্যের সমষ্টিকে পরিসীমা বলে। ত্রিভুজের বাহুগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধক্ষেত্রকে ত্রিভুজক্ষেত্র বলে।

*ত্রি*ভুজের যেকোনো শীর্ষবিন্দু হতে বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশকে মধ্যমা বলে। আবার, যেকোনো শীর্ষবিন্দু হতে বিপরীত বাহু এর লম্ব দূরত্বই ত্রিভুজের উচ্চতা।

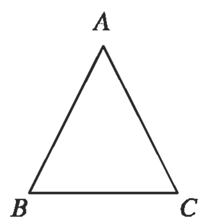
পাশের চিত্রে ABC একটি ত্রিভুজ। A, B, C এর তিনটি শীর্ষবিন্দু। AB, BC, CA এর তিনটি বাহু এবং এর তিনটি কোণ $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle BCA$ AB, BC, CA বাহুর পরিমাপের যোগফল ত্রিভুজটির পরিসীমা।

সমবাহু ত্রিভুজ



যে ত্রিভুজের তিনটি বাহু সমান তা সমবাহু ত্রিভুজ। পাশের চিত্রে ABC ত্রিভুজের $AB = BC = CA$। অর্থাৎ বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য সমান। ABC ত্রিভুজটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

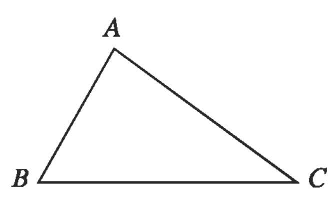
সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ



যে ত্রিভুজের দুইটি বাহু সমান তা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

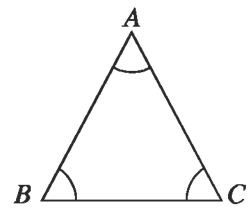
পাশের চিত্রে ABC ত্রিভুজের $AB = AC \neq BC$। অর্থাৎ দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান, যাদের কোনোটিই তৃতীয় বাহুর সমান নয়। ABC ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

বিষমবাহু ত্রিভুজ



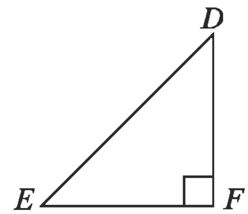
যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুই পরস্পর অসমান তা বিষমবাহু ত্রিভুজ। পাশের চিত্রে ABC ত্রিভুজের AB, BC, CA বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য পরস্পর অসমান। ABC ত্রিভুজটি বিষমবাহু।

সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ



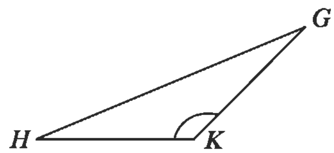
যে ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণ সূক্ষ্মকোণ, তা সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ। ABC ত্রিভুজে $\angle BAC$,$\angle ABC$,$\angle BCA$ কোণ তিনটির প্রত্যেকে সূক্ষ্মকোণ। অর্থাৎ প্রত্যেকটি কোণের পরিমাণ ৯০° অপেক্ষা কম। ΔABC একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ।

সমকোণী ত্রিভুজ



যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ, তা সমকোণী ত্রিভুজ। DEF ত্রিভুজে $\angle DFE$ সমকোণ, অপর কোণ দুইটি $\angle DEF$ ও $\angle EDF$ প্রত্যেকে সূক্ষ্মকোণ। ΔDEF একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

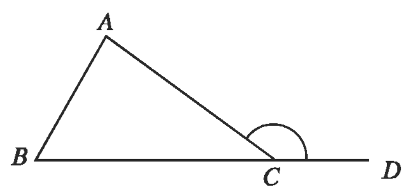
স্থূলকোণী ত্রিভুজ



যে ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ, তা স্থূলকোণী ত্রিভুজ। GHK ত্রিভুজে $\angle GKH$ একটি স্থূলকোণ, অপর কোণ দুইটি $\angle GHK$ ও $\angle HGK$ প্রত্যেকে সূক্ষ্মকোণ। ΔGHK একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ।

৯·৩ ত্রিভুজের বহিঃস্থ ও অন্তঃস্থ কোণ

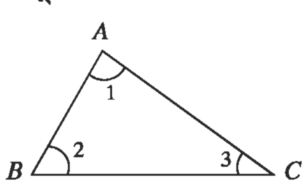
কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে কোণ উৎপন্ন হয় তা ত্রিভুজটির একটি বহিঃস্থ কোণ। এই কোণের সন্নিহিত কোণটি ছাড়া ত্রিভুজের অপর দুইটি কোণকে এই বহিঃস্থ কোণের বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ বলে।

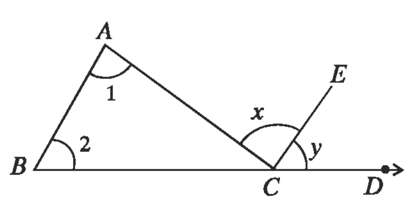


পাশের চিত্রে, ΔABC এর BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হয়েছে। $\angle ACD$ ত্রিভুজটির একটি বহিঃস্থ কোণ। $\angle ABD$, $\angle BAC$ ও $\angle ACB$ ত্রিভুজটির তিনটি অন্তঃস্থ কোণ। $\angle ACB$ কে $\angle ACD$ এর প্রেক্ষিতে সন্নিহিত অন্তঃস্থ কোণ বলা হয়। $\angle ABC$ ও $\angle BAC$ এর প্রত্যেককে $\angle ACD$ এর বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ বলা হয়।

উপপাদ্য ৫

ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।





মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। ত্রিভুজটির $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB =$ দুই সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ১। ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা এর বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

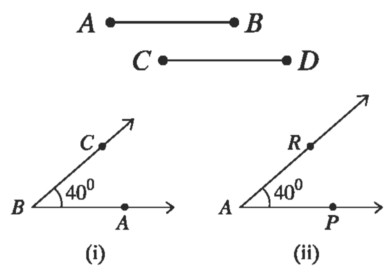
অনুসিদ্ধান্ত ২। ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয় পরস্পর পূরক।

কাজ :
১। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

বাহু ও কোণের সর্বসমতা :

দুইটি রেখাংশের দৈর্ঘ্য সমান হলে রেখাংশ দুইটি সর্বসম। আবার বিপরীতভাবে, দুইটি রেখাংশ সর্বসম হলে তাদের দৈর্ঘ্য সমান।
দুইটি কোণের পরিমাপ সমান হলে কোণ দুইটি সর্বসম। আবার বিপরীতভাবে, দুইটি কোণ সর্বসম হলে তাদের পরিমাপও সমান।

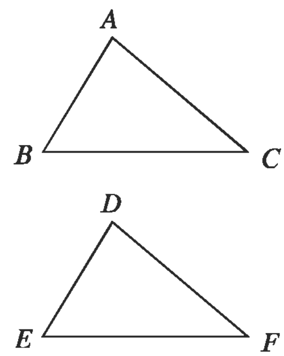


(i) (ii)

ত্রিভুজের সর্বসমতা

একটি ত্রিভুজকে অপর একটি ত্রিভুজের উপর স্থাপন করলে যদি ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে মিলে যায়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয়। সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণগুলো সমান।

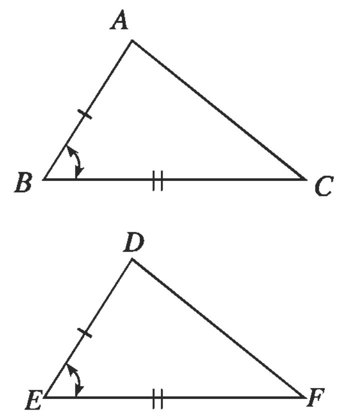
পাশের চিত্রে ΔABC ও ΔDEF সর্বসম। ΔABC ও ΔDEF সর্বসম হলে এবং A, B, C শীর্ষ যথাক্রমে D, E, F শীর্ষের উপর পতিত হলে $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$ এবং $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ হবে। ΔABC ও ΔDEF সর্বসম বোঝাতে $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ লেখা হয়।



উপপাদ্য ৬ (বাহু–কোণ–বাহু উপপাদ্য)

যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমান হয় এবং বাহু দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ দুইটি পরস্পর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

মনে করি, ΔABC ও ΔDEF এ $AB = DE$, $AC = DF$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle BAC =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle EDF$. তাহলে, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$
.



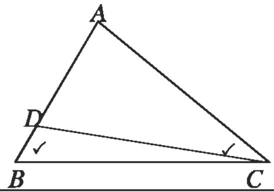
উপপাদ্য ৭

যদি কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হয়, তবে এদের বিপরীত কোণ দুইটিও পরস্পর সমান হবে।

মনে করি, ABC ত্রিভুজে $AB = AC$ । তাহলে, $\angle ABC = \angle ACB$ ।

উপপাদ্য ৮

যদি কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান হয়, তবে এদের বিপরীত বাহু দুইটিও পরস্পর সমান হবে।



বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, ABC ত্রিভুজে $\angle ABC = \angle ACB$ । প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = AC$ ।

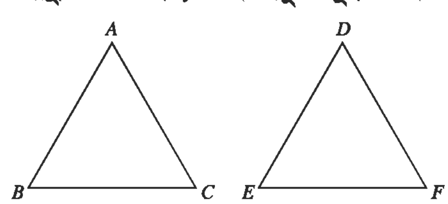
প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) ধরি $AB \neq AC$ এবং এদের কোনোটিই AB এর সমান নয়, তাহলে হয় (i) $AB > AC$ অথবা (ii) $AB < AC$ হবে। মনে করি, (i) $AB > AC$. AB থেকে AC এর সমান AD কেটে নিই। এখন, ADC ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু। সুতরাং $\angle ADC = \angle ACD$ ΔDBC এর বহিঃস্থ কোণ $\angle ADC > \angle ABC$ $\therefore \angle ACD > \angle ABC$ সুতরাং, $\angle ACB > \angle ABC$ কিন্তু তা প্রদত্ত শর্তবিরোধী।	[সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয় সমান] [বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুইটি প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর]
(২) অনুরূপভাবে, (ii) $AB < AC$ হলে দেখানো যায় যে $\angle ABC > \angle ACB$. কিন্তু তাও প্রদত্ত শর্তবিরোধী।	
(৩) সুতরাং, $AB > AC$ অথবা $AB < AC$ হতে পারে না।	
$\therefore$ $AB = AC$ (প্রমাণিত)	

উপপাদ্য ৯ (বাহু–বাহু–বাহু উপপাদ্য)

যদি একটি ত্রিভুজের তিন বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।

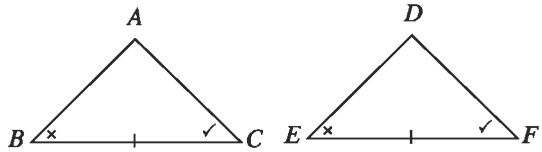
মনে করি, ΔABC এবং ΔDEF এ $AB = DE$, $AC = DF$ এবং $BC = EF$. তাহলে, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



উপপাদ্য ১০ (কোণ–বাহু–কোণ উপপাদ্য)

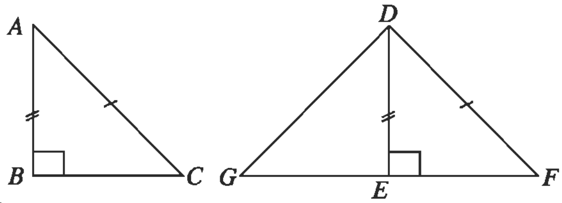
যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও তাদের সংলগ্ন বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও তাদের সংলগ্ন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।

মনে করি, ΔABC ও ΔDEF –এ $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ এবং কোণদ্বয়ের সংলগ্ন BC বাহু = অনুরূপ EF বাহু। তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম, অর্থাৎ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



উপপাদ্য ১১ (অতিভুজ–বাহু উপপাদ্য)

দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজদ্বয় সমান হলে এবং একটির এক বাহু অপরটির অপর এক বাহুর সমান হলে, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।



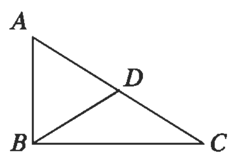
ABC ও DEF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে অতিভুজ AC =অতিভুজ DF এবং $AB = DE$. তাহলে, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

ত্রিভুজের বাহু ও কোণের মধ্যে সম্পর্ক রয়েছে। এরূপ সম্পর্ক নিচের উপপাদ্য ১২ ও উপপাদ্য ১৩ এর প্রতিপাদ্য বিষয়।

উপপাদ্য ১২

কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু অপর একটি বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

মনে করি, ΔABC - এ $AC > AB$. সুতরাং $\angle ABC > \angle ACB$.



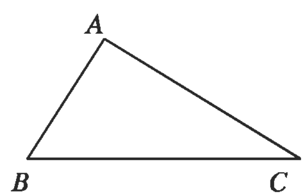
উপপাদ্য ১৩

কোনো ত্রিভুজের একটি কোণ অপর একটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হলে, বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC এর $\angle ABC > \angle ACB$

প্রমাণ করতে হবে যে, $AC > AB$

প্রমাণ:



ধাপ	যথার্থতা
(১) যদি AC বাহু AB বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর না হয়, তবে (i) $AC = AB$ অথবা (ii) $AC < AB$ হবে। (i) যদি $AC = AB$ হয়, $\angle ABC = \angle ACB$ কিন্তু শর্তানুযায়ী $\angle ABC > \angle ACB$	[সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের বিপরীত কোণদ্বয় সমান] [ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর]

তা প্রদত্ত শর্তবিরোধী।

(ii) আবার, যদি $AC < AB$ হয়, তবে $\angle ABC < \angle ACB$ হবে।

কিন্তু তাও প্রদত্ত শর্তবিরোধী।

(২) সুতরাং, AC বাহু AB এর সমান বা AB থেকে ক্ষুদ্রতর হতে পারে না।

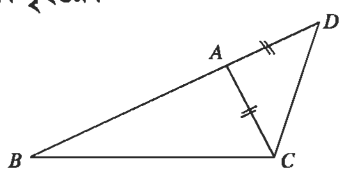
$\therefore AC > AB$ (প্রমাণিত)।

ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টির বা অন্তরের সাথে তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্যের সম্পর্ক রয়েছে।

উপপাদ্য ১৪

ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি এর তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর।

মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। ধরি, BC ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহু। তাহলে, $AB + AC > BC$।



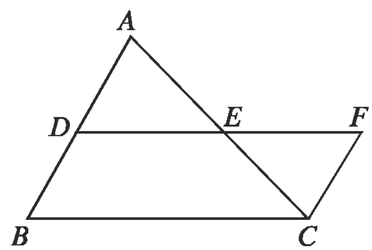
অনুসিদ্ধান্ত ১। ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের অন্তর এর তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। ΔABC এর যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের অন্তর এর তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। যেমন, $AB - AC < BC$।

উপপাদ্য ১৫

ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক।

মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। D ও E যথাক্রমে ত্রিভুজটির AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু। তাহলে, প্রমাণ করতে হবে যে $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$.



অঙ্কন: D ও E যোগ করে বর্ধিত করি যেন $EF = DE$ হয়। C, F যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔADE ও ΔCEF এর মধ্যে $AE = EC$, $DE = EF$ $\angle AED = \angle CEF$ $\Delta ADE \cong \Delta CEF$ $\therefore \angle ADE = \angle EFC$ এবং $\angle DAE = \angle ECF$. $\therefore DF \parallel BC$ বা $DE \parallel BC$.	[দেওয়া আছে] [অঙ্কনানুসারে] [বিপ্রতীপ কোণ] [বাহু–কোণ–বাহু উপপাদ্য] [একান্তর কোণ]

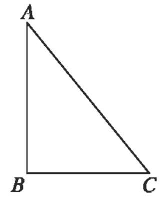
(২) আবার, $DF = BC$ বা $DE + EF = BC$

বা $DE + DE = BC$ বা $2DE = BC$ বা $DE = \frac{1}{2}BC$

উপপাদ্য ১৬ (পিথাগোরাসের উপপাদ্য)

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABC$ সমকোণ এবং AC অতিভুজ। তাহলে, $AC^2 = AB^2 + BC^2$.



অনুশীলনী ৬.৩

১। নিচে তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া হলো। কোন ক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব?

ক. ৫ সে. মি., ৬ সে. মি. ও ৭ সে. মি. খ. ৩ সে. মি., ৪ সে. মি. ও ৭ সে. মি.

গ. ৫ সে. মি., ৭ সে. মি. ও ১৪ সে. মি. ঘ. ২ সে. মি., ৪ সে. মি. ও ৮ সে. মি.

২। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

i যে ত্রিভুজের তিনটি কোণ সমকোণ তাকে সমকোণী ত্রিভুজ বলে

ii যে ত্রিভুজের তিনটি কোণ সুক্ষ্মকোণ তাকে সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ বলে।

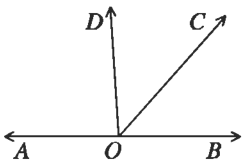
iii যে ত্রিভুজের তিনটি বাহু সমান তাকে সমবাহু ত্রিভুজ বলে

নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. i ও iii

গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

৩। প্রদত্ত চিত্র অনুযায়ী ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।



একসমকোণের সমান কোণ কোণটি?

ক. $\angle BOC$ খ. $\angle BOD$

গ. $\angle COD$ ঘ. $\angle AOD$

৪। $\angle BOC$ এর পূরক কোন কোণটি?

ক. $\angle AOC$ খ. $\angle BOD$

গ. $\angle COD$ ঘ. $\angle AOD$

৫। প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুসমূহ যোগ করলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তা সমবাহু হবে।

৬। প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান।

৭। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি বহিঃস্থ কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

৮। ΔABC এর অভ্যন্তরে D একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $AB + AC > BD + DC$.

৯। ΔABC এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে, প্রমাণ কর যে, $AB + AC > 2AD$.

১০। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি তার পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

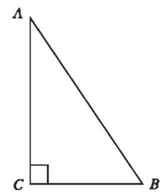
১১। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে, BA বাহুকে D পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত করা হল, যেন $BA = AD$ হয়। প্রমাণ কর যে, $\angle BCD$ একটি সমকোণ।

১২। ΔABC এর $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়।

প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A.$

১৩। ΔABC এর AB ও AC বাহুকে বর্ধিত করলে B ও C বিন্দুতে যে বহিঃকোণ দুইটি উৎপন্ন হয়, তাদের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি O বিন্দুতে মিলিত হলে,

প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A.$



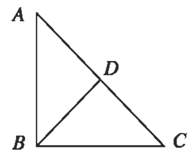
১৪। চিত্রে, দেওয়া আছে, $\angle C$ = এক সমকোণ

এবং $\angle B = 2\angle A$

প্রমাণ কর যে, $AB = 2BC$.

১৫। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

১৬। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।



১৭। চিত্রে, ABC ত্রিভুজের $\angle B =$ এক সমকোণ

এবং D , অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ কর যে, $BD = \frac{1}{2}AC.$

১৮। ΔABC এ $AB > AC$ এবং $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ কর যে, $\angle ADB$ স্থূলকোণ।

১৯। প্রমাণ কর যে, কোনো রেখাংশের লম্বদ্বিখণ্ডকের উপরিস্থিত যেকোনো বিন্দু উক্ত রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।

২০. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle$A= এক সমকোণ। BC বাহুর মধ্যবিন্দু D.

ক. প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী ABC ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

খ. দেখাও যে, AB+AC> 2AD

গ. প্রমাণ কর যে AD= $\frac{1}{2}$ BC

সপ্তম অধ্যায়

ব্যবহারিক জ্যামিতি

(Practical Geometry)

পূর্বের শ্রেণিতে জ্যামিতির বিভিন্ন উপপাদ্য প্রমাণে ও অনুশীলনীতে চিত্র অঙ্কনের প্রয়োজন ছিল। সে সব চিত্র সূক্ষ্মভাবে অঙ্কনের প্রয়োজন ছিল না। কিন্তু কখনো কখনো জ্যামিতিক চিত্র সূক্ষ্মভাবে অঙ্কনের প্রয়োজন হয়। যেমন, একজন স্থপতি যখন কোনো বাড়ির নকসা করেন কিংবা প্রকৌশলী যখন যন্ত্রের বিভিন্ন অংশের চিত্র আঁকেন। এ ধরনের জ্যামিতিক অঙ্কনে শুধু স্কেল ও পেন্সিল কম্পাসের সাহায্য নেওয়া হয়। ইতোপূর্বে স্কেল ও পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ আঁকতে শিখেছি। এ অধ্যায়ে বিশেষ ধরনের ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ অঙ্কনের আলোচনা করা হবে।

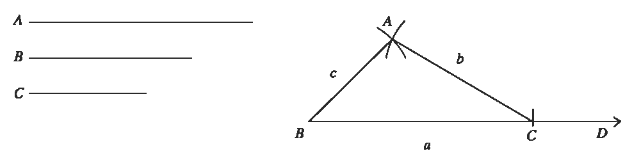
অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা

- চিত্রের সাহায্যে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- প্রদত্ত উপাত্ত ব্যবহার করে ত্রিভুজ অঙ্কন করতে পারবে।
- প্রদত্ত উপাত্ত ব্যবহার করে চতুর্ভুজ, সামান্তরিক, ট্রাপিজিয়ম অঙ্কন করতে পারবে।

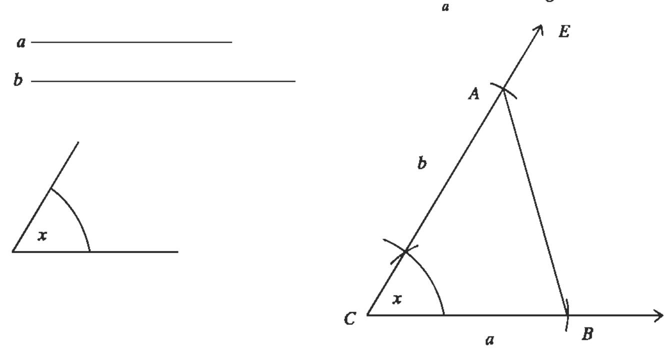
৭·১ ত্রিভুজ অঙ্কন

প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ রয়েছে। তবে কোনো ত্রিভুজের আকার ও আকৃতি নির্দিষ্ট করার জন্য সবগুলো বাহু ও কোণের প্রয়োজন হয় না। যেমন, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বলে এর যেকোনো দুইটি কোণের মান দেওয়া থাকলে তৃতীয় কোণটির মান বের করা যায়। আবার, ত্রিভুজের সর্বসমতা সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো থেকে দেখা যায় যে, কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ অর্থাৎ ছয়টির মধ্যে কেবলমাত্র নিম্নলিখিত তিনটি অংশ অপর এক ত্রিভুজের অনুরূপ তিনটি অংশের সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয়। অর্থাৎ, এ তিনটি অংশের দ্বারা নির্দিষ্ট আকারের অনন্য ত্রিভুজ আঁকা যায়। সপ্তম শ্রেণিতে আমরা নিম্নেবর্ণিত উপাত্ত থেকে ত্রিভুজ আঁকতে শিখেছি।

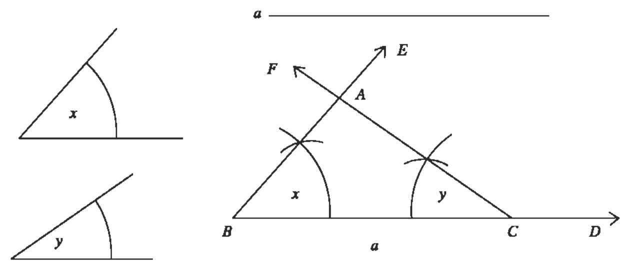
(১) তিনটি বাহু



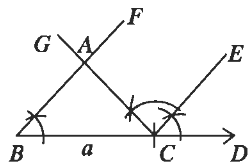
(২) দুইটি বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ



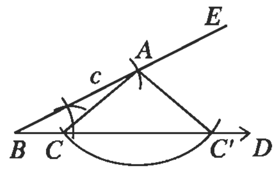
(৩) দুইটি কোণ ও তাদের সংলগ্ন বাহু



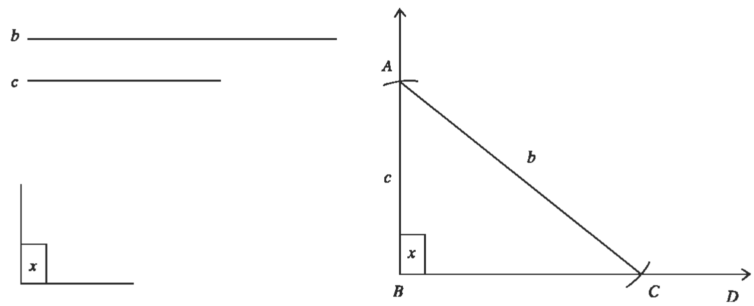
(৪) দুইটি কোণ ও একটির বিপরীত বাহু



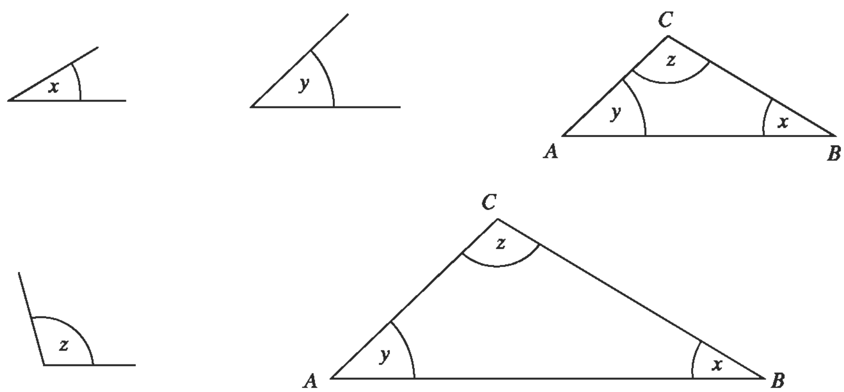
(৫) দুইটি বাহু ও তাদের একটির বিপরীত কোণ



(৬) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর একটি বাহু



লক্ষণীয় যে, উপরের প্রত্যেক ক্ষেত্রে ত্রিভুজের তিনটি অংশ নির্দিষ্ট করা হয়েছে। কিন্তু যেকোনো তিনটি অংশ নির্দিষ্ট করলেই ত্রিভুজটি নির্দিষ্ট হয় না। যেমন, ত্রিভুজের তিনটি কোণ দেওয়া থাকলে বিভিন্ন আকারের অসংখ্য ত্রিভুজ আঁকা যায় (যাদের সদৃশ ত্রিভুজ বলা যায়)।

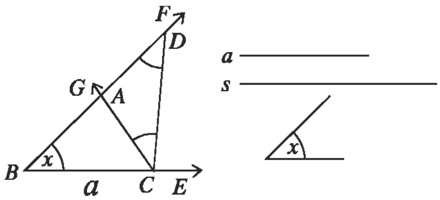


অনেক সময় ত্রিভুজ আঁকার জন্য এমন তিনটি উপাত্ত দেওয়া থাকে, যাদের সাহায্যে বিভিন্ন অঙ্কনের মাধ্যমে ত্রিভুজটি নির্ধারণ করা যায়। এরূপ কয়েকটি সম্পাদ্য নিচে বর্ণনা করা হলো।

সম্পাদ্য ১

ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি a, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x$ এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি s দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কন :

(১) যেকোনো একটি রশ্মি BE থেকে ভূমি a এর সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই। BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle CBF$ আঁকি।

(২) BF রশ্মি থেকে s এর সমান BD অংশ কাটি।

(৩) C, D যোগ করি। C বিন্দুতে DC রেখাংশের যে পাশে B বিন্দু আছে সেই পাশে $\angle BDC$ এর সমান $\angle DCG$ আঁকি।

(৪) CG রশ্মি BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ΔABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : ΔACD এ $\angle ADC = \angle ACD$ [অঙ্কন অনুসারে]

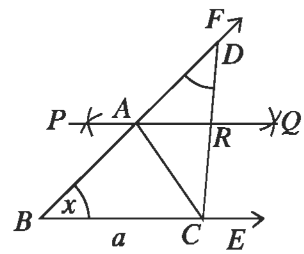
$\therefore \quad AC = AD.$

এখন, ΔABC এ $\angle ABC = \angle x,\ BC = a,$ [অঙ্কন অনুসারে]

এবং $BA + AC = BA + AD = BD = s$ । অতএব, ΔABC ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

বিকল্প পদ্ধতি

মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি a, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x$ এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি s দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কন :

(১) যেকোনো একটি রশ্মি BE থেকে ভূমি a এর সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই। BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle CBF$ আঁকি।

(২) BF রশ্মি থেকে s এর সমান BD অংশ কাটি।

(৩) C, D যোগ করি। CD এর লম্ব দ্বিখণ্ডক PQ আঁকি।

(৪) PQ রশ্মি BD রশ্মিকে A বিন্দুতে ছেদ করে। A, C যোগ করি।

তাহলে, ΔABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : ΔACR এবং ΔADR এ $CR = DR$ $AR = AR$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ARC = \angle ARD$ [সমকোণ]

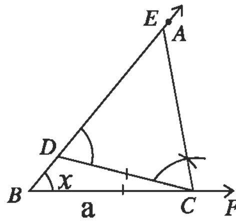
$\Delta ACR \cong \Delta ADR$. $\therefore$ $AC = AD$

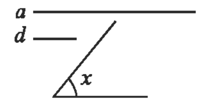
এখন, ΔABC এ $\angle ABC = \angle x,\ BC = a,$ [অঙ্কন অনুসারে]

এবং $BA + AC = BA + AD = BD = s$. অতএব, ΔABC ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য ২

ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি সূক্ষ্মকোণ ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।





মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি a ভূমি সংলগ্ন সূক্ষ্মকোণ $\angle x$. এবং অপর দুই বাহুর অন্তর d দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

(১) যেকোনো একটি রশ্মি BF থেকে ভূমি a এর সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই। BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle CBE$ আঁকি।

(২) BE রশ্মি থেকে d এর সমান BD অংশ কেটে নিই।

(৩) C, D যোগ করি। DC রেখাংশের যে পাশে E বিন্দু আছে সেই পাশে C বিন্দুতে $\angle EDC$ এর সমান $\angle DCA$ আঁকি। CA রশ্মি BE রশ্মিকে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ΔABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, ΔACD এ $\angle ADC = \angle ACD$

$\therefore \quad AC = AD.$

সুতরাং দুই বাহুর অন্তর, $AB - AC = AB - AD = BD = d.$

এখন, ΔABC এ $BC = a, AB - AC = d$ এবং $\angle ABC = \angle x.$ সুতরাং, ΔABC ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

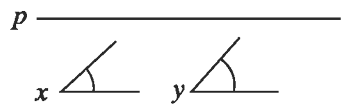
কাজ :

১। প্রদত্ত কোণ সূক্ষ্মকোণ না হলে, উপরের পদ্ধতিতে অঙ্কন করা সম্ভব নয়। কেন ? এ ক্ষেত্রে ত্রিভুজটি আঁকার কোনো উপায় বের কর।

২। ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি সূক্ষ্মকোণ ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। বিকল্প পদ্ধতিতে ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

সম্পাদ্য ৩

ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ ও পরিসীমা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

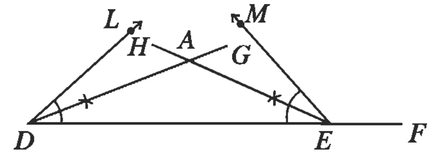


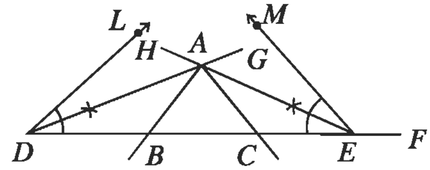
মনে করি, একটি ত্রিভুজের পরিসীমা p এবং ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle x$ ও $\angle y$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

(১) যেকোনো একটি রশ্মি DF থেকে পরিসীমা p এর সমান করে DE অংশ কেটে নিই। D ও E বিন্দুতে DE রেখাংশের একই পাশে $\angle x$ এর সমান $\angle EDL$ এবং $\angle y$ এর সমান $\angle DEM$ আঁকি।

(২) কোণ দুইটির দ্বিখণ্ডক DG ও EH আঁকি।





(৩) মনে করি, DG ও EH রশ্মিদ্বয় পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুতে $\angle ADE$ এর সমান $\angle DAB$ এবং $\angle AED$ এর সমান $\angle EAC$ আঁকি।

(৪) AB এবং AC রশ্মিদ্বয় DE রেখাংশকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ΔABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : ΔADB এ $\angle ADB = \angle DAB$ [অঙ্কন অনুসারে], $\therefore$ $AB = DB.$

আবার, ΔACE এ $\angle AEC = \angle EAC$; $\therefore$ $CA = CE.$

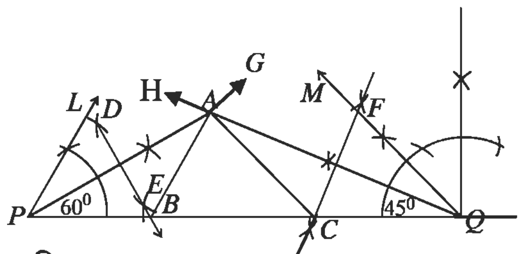
সুতরাং ΔABC এ $AB + BC + CA = DB + BC + CE = DE = p.$

$$\angle ABC = \angle ADB + \angle DAB = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle x = \angle x$$

এবং $\angle ACB = \angle AEC + \angle EAC = \frac{1}{2}\angle y + \frac{1}{2}\angle y = \angle y.$ সুতরাং ΔABC ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

কাজ : ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি সূক্ষ্মকোণ ও পরিসীমা দেওয়া আছে। বিকল্প পদ্ধতিতে ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

উদাহরণ ১ ।একটি ত্রিভুজ ABC আঁক, যার $\angle B = 60°, \angle C = 45°$ এবং পরিসীমা $AB + BC + CA = 11$ সে.মি.।



অঙ্কন : নিচের ধাপসমূহ অনুসরণ করি:

(১) রেখাংশ $PQ = 11$ সে.মি. আঁকি।

(২) PQ রেখাংশের একই পাশে P এবং Q বিন্দুতে যথাক্রমে $\angle QPL = 60°$ ও $\angle PQM = 45°$ কোণ আঁকি।

(৩) কোণ দুইটির দ্বিখণ্ডক PG ও QH আঁকি। মনে করি, PG ও QH রশ্মিদ্বয় পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

(৪) PA, QA রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক আঁকি যা PQ রেখাংশকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

(৫) A, B এবং A, C যোগ করি।

তাহলে, ΔABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

কাজ : সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন একটি বাহু এবং অতিভুজ ও অপর বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

অনুশীলনী ৭·১

১। নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে ত্রিভুজ অঙ্কন কর :

ক. তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি., 3·5 সে.মি., 2·8 সে.মি.।

খ. দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি., 3 সে.মি. এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°।

গ. দুইটি কোণ 60° ও 45° এবং এদের সংলগ্ন বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.।

ঘ. দুইটি কোণ 60° ও 45° এবং 45° কোণের বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.।

ঙ. দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4.5 সে.মি. ও 3.5 সে.মি. এবং দ্বিতীয় বাহুর বিপরীত কোণ 30°।

চ. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি. ও 4 সে.মি.।

২। নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে ত্রিভুজ অঙ্কন কর :

ক. ভূমি 3·5 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 60° ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি 8 সে.মি ।

খ. ভূমি 4 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 50° ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি 7.5 সে.মি ।

গ. ভূমি 4 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 50° ও অপর দুই বাহুর অন্তর 1.5 সে.মি ।

ঘ. ভূমি 5 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 45° ও অপর দুই বাহুর অন্তর 1 সে.মি ।

ঙ. ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি যথাক্রমে 60° ও 45° ও পরিসীমা 12 সে.মি.।

ঙ. ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি যথাক্রমে 30° ও 45° ও পরিসীমা 10 সে.মি.।

৩। একটি ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ এবং শীর্ষ থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

৪। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

৫। ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

৬। সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

৭। ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি স্থূলকোণ ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

৭·২ চতুর্ভুজ অঙ্কন

আমরা দেখেছি যে, ত্রিভুজের তিনটি উপাত্ত দেওয়া থাকলে অনেক ক্ষেত্রেই ত্রিভুজটি নির্দিষ্টভাবে আঁকা সম্ভব। কিন্তু চতুর্ভুজের চারটি বাহু দেওয়া থাকলেই একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকা যায় না। নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকার জন্য পাঁচটি স্বতন্ত্র উপাত্ত প্রয়োজন হয়। নিম্নে বর্ণিত পাঁচটি উপাত্ত জানা থাকলে, নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকা যায়।

(১) চারটি বাহু ও একটি কোণ

(২) চারটি বাহু ও একটি কর্ণ

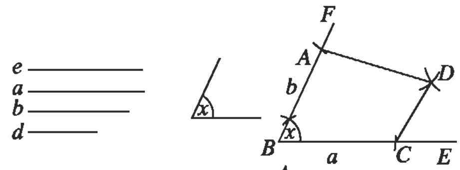
(৩) তিনটি বাহু ও দুইটি কর্ণ

(৪) তিনটি বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত দুইটি কোণ

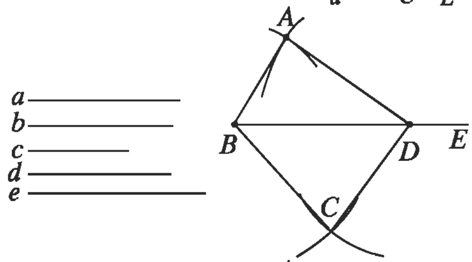
(৫) দুইটি বাহু ও তিনটি কোণ।

অষ্টম শ্রেণিতে উলেখিত উপাত্ত দিয়ে চতুর্ভুজ অঙ্কন বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। অঙ্কনের কৌশল লক্ষ করে দেখা যায় কিছু ক্ষেত্রে সরাসরি চতুর্ভুজ আঁকা হয়। আবার কিছু ক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কনের মাধ্যমে চতুর্ভুজ আঁকা হয়। যেহেতু কর্ণ চতুর্ভুজকে দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে, সেহেতু উপাত্ত হিসাবে একটি বা দুইটি কর্ণ প্রদত্ত হলে ত্রিভুজ অঙ্কনের মাধ্যমে চতুর্ভুজ আঁকা সম্ভব হয়।

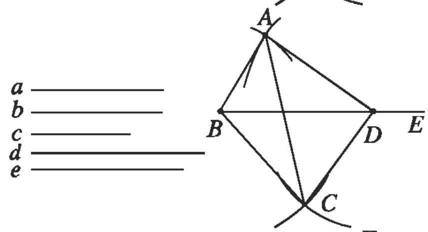
(১) চারটি বাহু ও একটি কোণ



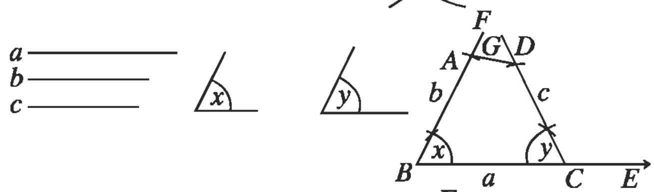
(২) চারটি বাহু ও একটি কর্ণ



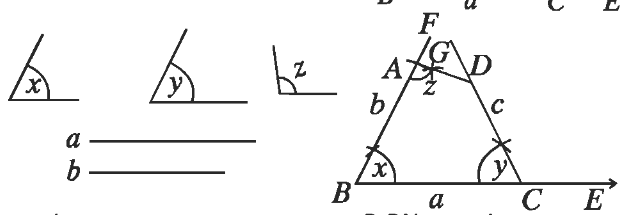
(৩) তিনটি বাহু ও দুইটি কর্ণ



(৪) তিনটি বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত দুইটি কোণ



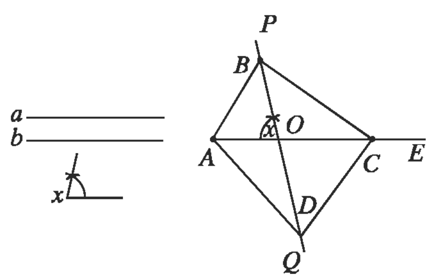
(৫) দুইটি বাহু ও তিনটি কোণ।



বিশেষ ধরনের চতুর্ভুজ অঙ্কনের জন্য অনেক সময় এমন উপাত্ত দেওয়া থাকে যা থেকে নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকার জন্য প্রয়োজনীয় পাঁচটি স্বতন্ত্র উপাত্ত পাওয়া যায়। তাহলে ঐ উপাত্তের সাহায্যেও চতুর্ভুজটি আঁকা যায়। যেমন, সামান্তরিকের দুইটি সংলগ্ন বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণটি দেওয়া থাকলে সামান্তরিকটি আঁকা যায়। এখানে তিনটি মাত্র উপাত্ত দেওয়া আছে। আবার বর্গের মাত্র একটি বাহু দেওয়া থাকলেই বর্গটি আঁকা যায়। কারণ, তাতে পাঁচটি উপাত্ত, যথা বর্গের চার সমান বাহু ও এক কোণ (সমকোণ) নির্দিষ্ট হয়।

সম্পাদ্য ৪

সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ ও তাদের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।



মনে করি, সামান্তরিকের কর্ণ দুইটি a ও b এবং কর্ণদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ $\angle x$ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি AM থেকে a এর সমান AC রেখাংশ নিই। AC এর মধ্যবিন্দু O নির্ণয় করি। O বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle AOP$ আঁকি। OP এর বিপরীত রশ্মি OQ অঙ্কন করি। OP ও OQ রশ্মিদ্বয় থেকে $\frac{1}{2}b$ এর সমান যথাক্রমে OB ও OD রেখাংশদ্বয় নিই। A, B; A, D; C, B ও C, D যোগ করি।

তাহলে, $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ : ΔAOB ও ΔCOD এ $OA = OC = \frac{1}{2}a,\ OB = OD = \frac{1}{2}b$ [অঙ্কনানুসারে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB$ =অন্তর্ভুক্ত $\angle COD$ [বিপ্রতীপ কোণ]।

অতএব, $\Delta AOB \cong \Delta COD$

সুতরাং, $AB = CD$

এবং $\angle ABO = \angle CDO$; কিন্তু কোণ দুইটি একান্তর কোণ।

$\therefore$ AB ও CD সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, AD ও BC সমান ও সমান্তরাল।

সুতরাং, $ABCD$ একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় $AC = AO + OC = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a$

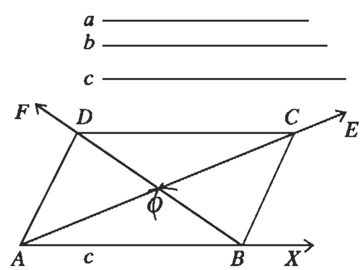
ও $BD = BO + OD = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b$ এবং কর্ণ দুইটির অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB = \angle x$

অতএব, $ABCD$ ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

সম্পাদ্য ৫

সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ ও একটি বাহু দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

মনে করি সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ a ও b এবং একটি বাহু c দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।



অঙ্কন : a ও b কর্ণদ্বয়কে সমান দুইভাগে বিভক্ত করি। যেকোনো রশ্মি AX থেকে c এর সমান AB নিই। A ও B কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে $\frac{a}{2}$ ও $\frac{b}{2}$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AB এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। মনে করি, বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। A, O ও O, B যোগ করি। AO কে AE বরাবর এবং BO কে BF বরাবর বর্ধিত করি। OE থেকে $\frac{a}{2} = OC$ এবং OF থেকে $\frac{b}{2} = OD$ নিই। A, D; D, C ও B, C যোগ করি।

তাহলে, $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ : ΔAOB ও ΔCOD এ $OA = OC = \frac{a}{2}; OB = OD = \frac{b}{2},$ [অঙ্কনানুসারে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle COD$ [বিপ্রতীপ কোণ]

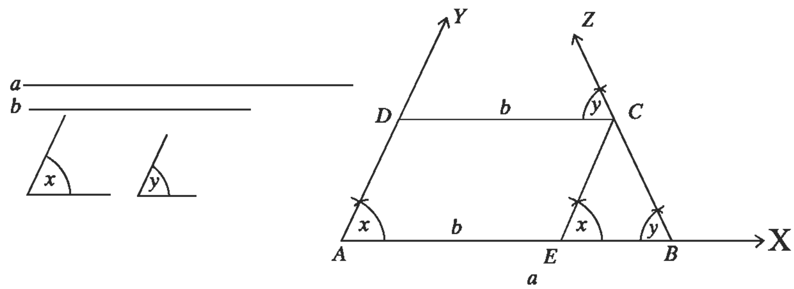
$\therefore$ $\Delta AOB \cong \Delta COD$.

$\therefore$ $AB = CD$ এবং $\angle ABO = \angle ODC$; কিন্তু কোণ দুইটি একান্তর কোণ।

$\therefore$ AB ও CD সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, AD ও BC সমান ও সমান্তরাল। অতএব, $ABCD$ ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

উদাহরণ ১। ট্রাপিজিয়ামের দুইটি সমান্তরাল বাহু এবং এদের মধ্যে বৃহত্তর বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ দেওয়া আছে। ট্রাপিজিয়ামটি আঁক।



মনে করি, ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় a এবং b , যেখানে $a > b$ এবং বৃহত্তর বাহু a সংলগ্ন কোণদ্বয় $\angle x$ ও $\angle y$ । ট্রাপিজিয়ামটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি AX থেকে $AB = a$ নিই। B রেখাংশের A বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle BAY$ এবং B বিন্দুতে $\angle y$ এর সমান $\angle ABZ$ আঁকি।

এবার AB রেখাংশ থেকে $AE = b$ কেটে নিই। E বিন্দুতে $EC || AY$ আঁকি যা BZ রশ্মিকে C বিন্দুতে ছেদ করে। এবার $CD || BA$ আঁকি। CD রেখাংশ AY রশ্মিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট ট্রাপিজিয়াম।।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে, $AB || CD$ এবং $AD || EC$ সুতরাং $ABCD$ একটি সামান্তরিক এবং $CD = AE = b$. এখন, চতুর্ভুজ $ABCD$ এ $AB = a$, $CD = b$, $AB || CD$ এবং $\angle BAD = \angle x$, $\angle ABC = \angle y$ (অঙ্কন অনুসারে)

অতএব, $ABCD$ ই নির্ণেয় ট্রাপিজিয়াম।

কাজ : রম্বসের পরিসীমা ও একটি কোণ দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

অনুশীলনী ৭.২

১। সমকোণী ত্রিভুজের অপর দুইটি কোণের পরিমাণ দেওয়া থাকলে নিম্নের কোন ক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব।

ক. 63^0 ও 36^0 খ. 30^0 ও 70^0

গ. 40^0 ও 50^0 ঘ. 80^0 ও 20^0

২। i আয়ত একটি সামান্তরিক

ii বর্গ একটি আয়ত

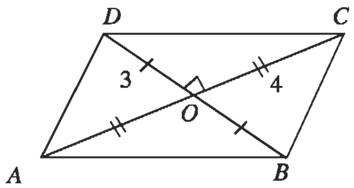
iii রম্বস একটি বর্গ

ওপরের তথ্যের আলোকে নিম্নের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. i ও iii

গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

প্রদত্ত চিত্রের আলোকে ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও



৩। ΔAOB এর ক্ষেত্রফল কত?

ক. 6 বর্গ একক খ. 7 বর্গ একক

গ. 12 বর্গ একক ঘ. 14 বর্গ একক

৪। চতুর্ভুজটির পরিসীমা

ক. 12 একক খ. 14 একক

গ. 20 একক ঘ. 28 একক

৫। নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে চতুর্ভুজ অঙ্কন কর :

ক. চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 3·5 সে.মি., 2.5 সে.মি. ও 3 সে,মি. এবং একটি কোণ 45°।

খ. চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 সে.মি, 4 সে.মি., 2·5 সে.মি. ও 3.5 সে.মি. এবং একটি কর্ণ 5 সে.মি.।

গ. তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3·2 সে.মি., 3 সে.মি., 3·5 সে.মি. এবং দুইটি কর্ণ 2·8 সে.মি. ও 4.5 সে.মি.।

ঘ. তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 3·5 সে.মি., 4 সে.মি. এবং দুইটি কোণ 60° ও 45°।

৬। নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে সামান্তরিক অঙ্কন কর :

ক. দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 4 সে.মি., 6·5 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ 45°।

খ. দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 5 সে.মি., 6·5 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ 30°।

গ. একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 5 সে.মি., 6·5 সে.মি.।

ঘ. একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি. এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 4.5 সে.মি., 6 সে.মি.।

৭। $ABCD$ চতুর্ভুজের AB ও BC বাহু এবং $\angle B, \angle C$ ও $\angle D$ কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁক।

৮। $ABCD$ চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটির ছেদবিন্দু দ্বারা কর্ণ দুইটির চারটি খণ্ডিত অংশ এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ যথাক্রমে OA = 4 সে.মি., OB = 5 সে.মি., OC = 3·5 সে.মি., OD = 4·5 সে.মি. ও $\angle AOB$ = 80°. চতুর্ভুজটি আঁক।

৯। রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3·5 সে.মি. ও একটি কোণ 45° ; রম্বসটি আঁক।

১০। রম্বসের একটি বাহু এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

১১। রম্বসের দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

১২। বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা দেওয়া আছে। বর্গক্ষেত্রটি আঁক।

১৩। জকী সাহেব ও জাফর সাহেবের বসত বাড়ি একই সীমারেখার মধ্যে অবস্থিত এবং বাড়ির ক্ষেত্রফল সমান। তবে জকীর সাহেবের বাড়ির আকৃতি আয়তাকার এবং জাফর সাহেবের বাড়ি সামান্তরিক আকৃতির।

ক. ভূমির দৈর্ঘ্য 10 একক এবং উচ্চতা 8 একক ধরে তাদের বাড়ির সীমারেখা অঙ্কন কর।

খ. দেখাও যে, জকী সাহেবের বাড়ির পরিসীমা জাফর সাহেবের বাড়ির পরিসীমা অপেক্ষা ছোট।

গ. জকী সাহেবের বাড়ির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত $4:3$ এবং ক্ষেত্রফল 300 বর্গ একক হলে, তাদের বাড়ির ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত নির্ণয় কর।

১৪। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 5 সে.মি ও এক বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি,

ওপরের তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

ক. ত্রিভুজটির অপর বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ. ত্রিভুজটি অঙ্কন কর (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)।

গ. ত্রিভুজটির পরিসীমার সমান পরিসীমা বিশিষ্ট একটি বর্গ অঙ্কন কর (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)।

১৫। ABCD চতুর্ভুজের AB = 4 সে.মি. BC = 5 সে.মি, $\angle A = 85°$, $\angle B = 80°$ এবং $\angle C = 95°$.

ওপরের তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও

ক. $\angle D$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী ABCD চতুর্ভুজটি অঙ্কন কর (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)।

গ. প্রদত্ত বাহু দুইটিকে একটি সামন্তরিকের বাহু এবং $\angle B = 80°$ ধরে সামন্তরিকটি অঙ্কন কর (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)।

অষ্টম অধ্যায়

বৃত্ত (Circle)

আমরা জেনেছি যে, বৃত্ত একটি সমতলীয় জ্যামিতিক চিত্র যার বিন্দুগুলো কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরত্বে অবস্থিত। বৃত্ত সম্পর্কিত বিভিন্ন ধারণা যেমন কেন্দ্র, ব্যাস, ব্যাসার্ধ, জ্যা ইত্যাদি বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। এ অধ্যায়ে সমতলে কোনো বৃত্তের চাপ ও স্পর্শক সম্পর্কিত প্রতিজ্ঞার আলোচনা করা হবে।

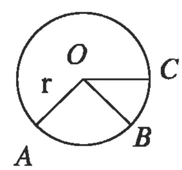
অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা

- বৃত্তচাপ, কেন্দ্রস্থ কোণ, বৃত্তস্থ কোণ, বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- বৃত্ত সংক্রান্ত উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবে।
- বৃত্ত সংক্রান্ত বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে উপপাদ্যগুলো প্রয়োগ করতে পারবে।
- বৃত্ত সম্পর্কিত সম্পাদ্য বর্ণনা করতে পারবে।

৮·১ বৃত্ত

বৃত্ত একটি সমতলীয় জ্যামিতিক চিত্র যার বিন্দুগুলো কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরত্বে অবস্থিত। নির্দিষ্ট বিন্দুটি বৃত্তের কেন্দ্র। নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরত্ব বজায় রেখে কোনো বিন্দু যে আবদ্ধ পথ চিত্রিত করে তাই বৃত্ত। কেন্দ্র হতে বৃত্তস্থ কোনো বিন্দুর দূরত্বকে ব্যাসার্ধ বলে।

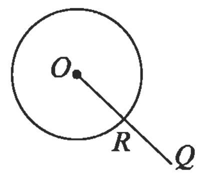
মনে করি, O সমতলের কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু এবং r নির্দিষ্ট পরিমাপ। সমতলস্থ যে সকল বিন্দু O থেকে r দূরত্বে অবস্থিত, তাদের সেট বৃত্ত, যার কেন্দ্র O ও ব্যাসার্ধ r. চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র, A, B ও C বৃত্তস্থ বিন্দু। OA, OB ও OC এর প্রত্যেকটি বৃত্তটির ব্যাসার্ধ।



সমতলস্থ কতিপয় বিন্দুকে সমবৃত্ত বিন্দু বলা হয় যদি বিন্দুগুলো দিয়ে একটি বৃত্ত যায় অর্থাৎ, এমন একটি বৃত্ত থাকে যাতে বিন্দুগুলো অবস্থিত হয়। উপরের চিত্রে A, B ও C সমবৃত্ত বিন্দু।

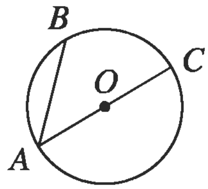
বৃত্তের অভ্যন্তর ও বহির্ভাগ

যদি কোনো বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ r হয় তবে O থেকে সমতলের যে সকল বিন্দুর দূরত্ব r থেকে কম তাদের সেটকে বৃত্তটির অভ্যন্তর এবং O থেকে সমতলের যে সকল বিন্দুর দূরত্ব r থেকে বেশি তাদের সেটকে বৃত্তটির বহির্ভাগ বলা হয়। বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ সম্পূর্ণভাবে বৃত্তের অভ্যন্তরেই থাকে।



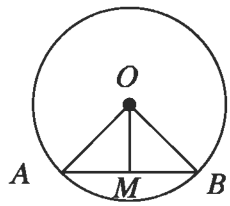
কোনো বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু ও বহিঃস্থ একটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ বৃত্তটিকে একটি ও কেবল একটি বিন্দুতে ছেদ করে। চিত্রে, P বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু এবং Q বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু। PQ রেখাংশ বৃত্তটিকে কেবল R বিন্দুতে ছেদ করে।

বৃত্তের জ্যা ও ব্যাস



বৃত্তের দুইটি ভিন্ন বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ বৃত্তটির একটি জ্যা। বৃত্তের কোনো জ্যা যদি কেন্দ্র দিয়ে যায় তবে জ্যাটিকে বৃত্তের ব্যাস বলা হয়। অর্থাৎ বৃত্তের কেন্দ্রগামী যেকোনো জ্যা হলো ব্যাস। চিত্রে, AB ও AC বৃত্তটির দুইটি জ্যা এবং বৃত্তটির কেন্দ্র O । এদের মধ্যে AC জ্যাটি ব্যাস; কারণ জ্যাটি বৃত্তটির কেন্দ্রগামী। OA ও OC বৃত্তের দুইটি ব্যাসার্ধ। সুতরাং, বৃত্তের কেন্দ্র প্রত্যেক ব্যাসের মধ্যবিন্দু। অতএব প্রত্যেক ব্যাসের দৈর্ঘ্য $2r$, যেখানে r বৃত্তটির ব্যাসার্ধ।

উপপাদ্য ১। বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা এর ওপর লম্ব।



মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে ব্যাস নয় এমন একটি জ্যা AB এবং এই জ্যা এর মধ্য বিন্দু M । O, M যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, OM রেখাংশ AB জ্যা এর উপর লম্ব।

অঙ্কন : O, A এবং O, B যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	**যথার্থতা**
(১) ΔOAM এবং ΔOBM এ	
$AM = BM$	$[M, AB$ এর মধ্যবিন্দু]
$OA = OB$	[উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
এবং $OM = OM$	[সাধারণ বাহু]
সুতরাং, $\Delta OAM \cong \Delta OBM$	[বাহু–বাহু–বাহু উপপাদ্য]
$\therefore \angle OMA = \angle OMB$	
(২) যেহেতু কোণদ্বয় রৈখিক যুগল কোণ এবং তাদের পরিমাপ সমান,	
সুতরাং, $\angle OMA = \angle OMB = 1$ সমকোণ।	
অতএব, $OM \perp AB$. (প্রমাণিত)	

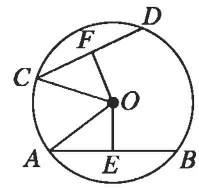
অনুসিদ্ধান্ত ১। বৃত্তের যেকোনো জ্যা এর লম্ব–দ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী।

অনুসিদ্ধান্ত ২। যেকোনো সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুইয়ের অধিক বিন্দুতে ছেদ করতে পারে না।

কাজ :

১। উপপাদ্য ১ এর বিপরীত উপপাদ্যটি নিম্নরূপ: বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা এর ওপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে–প্রমাণ কর।

উপপাদ্য ২। বৃত্তের সমান সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।



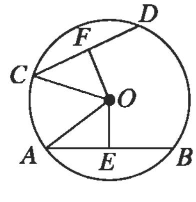
মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ও CD বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে, O থেকে AB এবং CD জ্যাদ্বয় সমদূরবর্তী।

অঙ্কন : O থেকে AB এবং CD জ্যা এর উপর যথাক্রমে OE এবং OF লম্ব আঁকি। O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) $OE \perp AB$ ও $OF \perp CD$. সুতরাং, $AE = BE$ এবং $CF = DF$. $\therefore AE = \frac{1}{2}AB$ এবং $CF = \frac{1}{2}CD$.	[কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) কিন্তু $AB = CD$ $\therefore AE = CF$.	[কল্পনা]
(৩) এখন ΔOAE এবং ΔOCF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে অতিভুজ $OA =$ অতিভুজ OC এবং	[উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$AE = CF$.	[ধাপ ২]
$\therefore \Delta OAE \cong \Delta OCF$ $\therefore OE = OF$.	[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]
(৪) কিন্তু OE এবং OF কেন্দ্র O থেকে যথাক্রমে AB জ্যা এবং CD জ্যা এর দূরত্ব। সুতরাং, AB এবং CD জ্যাদ্বয় বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।	

উপপাদ্য ৩। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী সকল জ্যা পরস্পর সমান।



মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ও CD দুইটি জ্যা। O থেকে AB ও CD এর উপর যথাক্রমে OE ও OF লম্ব। তাহলে OE ও OF কেন্দ্র থেকে যথাক্রমে AB ও CD জ্যায়ের দূরত্ব নির্দেশ করে। $OE = OF$ হলে প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = CD$.

অঙ্কন : O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু $OE \perp AB$ এবং $OF \perp CD$.	[সমকোণ]
সুতরাং, $\angle OEA = \angle OFC =$ এক সমকোণ।	
(২) এখন, ΔOAE এবং ΔOCF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের	
মধ্যে অতিভুজ $OA =$ অতিভুজ OC এবং $OE = OF$ [কল্পনা]	[উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$\therefore \quad \Delta OAE \cong \Delta OCF$	
$\therefore \quad AE = CF.$	[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ–বাহু সর্মসমতা উপপাদ্য
(৩) $AE = \frac{1}{2}AB$ এবং $CF = \frac{1}{2}CD$	[কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(৪) সুতরাং $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$	
অর্থাৎ., $AB = CD$.	

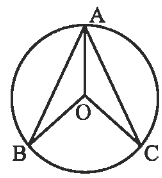
অনুসিদ্ধান্ত ১। বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা।

অনুশীলনী ৮·১

১। প্রামণ কর যে, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তাদের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।

২। প্রমাণ কর যে, দুইটি সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং জ্যাদ্বয়ের ওপর লম্ব।

৩। কোনো বৃত্তের AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, $AB = AC.$



৪। চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং জ্যা $AB =$ জ্যা $AC.$
প্রমাণ কর যে, $\angle BAO = \angle CAO.$

৫। কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো দিয়ে যায়। দেখাও যে, বৃত্তটির কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

৬। দুইটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তের একটির AB জ্যা অপর বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ কর যে, $AC = BD.$

৭। বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে দেখাও যে, তাদের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।

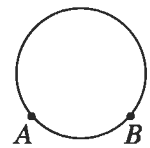
৮। প্রমাণ কর যে, বৃত্তের সমান জ্যা এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।

৯। দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হয়।

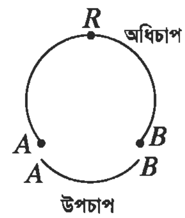
১০। দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান্তরাল জ্যা আঁকলে তারা সমান হয়।

১১। দেখাও যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যা–টি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।

৮·২ বৃত্তচাপ



বৃত্তের যেকোনো দুইটি বিন্দুর মধ্যের পরিধির অংশকে চাপ বলে। চিত্রে A ও B দুইটি বিন্দুর মাঝে বৃত্তের অংশগুলো লক্ষ করি। দেখা যায়, দুইটি অংশের একটি অংশ ছোট, অন্যটি তুলনামূলকভাবে বড়। ছোট অংশটিকে উপচাপ ও বড়টিকে অধিচাপ বলা হয়। A ও B এই চাপের প্রান্তবিন্দু এবং চাপের অন্য সকল বিন্দু তার অন্তঃস্থ বিন্দু। চাপের অন্তঃস্থ বিন্দুটি একটি বিন্দু C নির্দিষ্ট করে চাপটিকে ACB চাপ বলে অভিহিত করা হয় এবং ACB প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আবার কখনো উপচাপটি AB প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। বৃত্তের দুইটি বিন্দু A ও B বৃত্তটিকে দুইটি চাপে বিভক্ত করে। উভয় চাপের প্রান্তবিন্দু A ও B এবং প্রান্তবিন্দু ছাড়া চাপ দুইটির অন্য কোনো সাধারণ বিন্দু নেই।



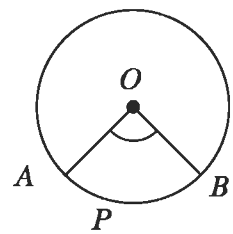
কোণ কর্তৃক খন্ডিত চাপ

একটি কোণ কোনো বৃত্তে একটি চাপ খন্ডিত বা ছিন্ন করে বলা হয় যদি

(১) চাপটির প্রত্যেক প্রান্তবিন্দু কোণটির বাহুতে অবস্থিত হয়,

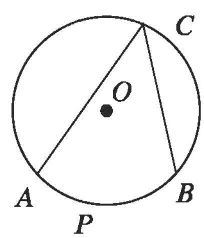
(২) কোণটির প্রত্যেক বাহুতে চাপটির অন্তত একটি প্রান্তবিন্দু, অবস্থিত হয় এবং

(৩) চাপটির অন্তঃস্থ প্রত্যেকটি বিন্দু কোণটির অভ্যন্তরে থাকে। চিত্রে প্রদর্শিত কোণটি O কেন্দ্রিক বৃত্তে APB চাপ খন্ডিত করে।



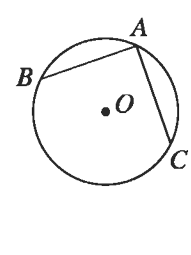
বৃত্তস্থ কোণ

একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোনো বৃত্তের একটি বিন্দু হলে এবং কোণটির প্রত্যেক বাহুতে শীর্ষবিন্দু ছাড়াও বৃত্তের একটি বিন্দু থাকলে কোণটিকে একটি বৃত্তস্থ কোণ বা বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোণ বলা হয়। চিত্রে $\angle ACB$ বৃত্তস্থ কোণ। প্রত্যেক বৃত্তস্থ কোণ বৃত্তে একটি চাপ খন্ডিত করে। এই চাপ উপচাপ, অর্ধবৃত্ত অথবা অধিচাপ হতে পারে।



একটি বৃত্তস্থ কোণ বৃত্তে যে চাপ খন্ডিত করে, কোণটি সেই চাপের ওপর দন্ডায়মান এবং খন্ডিত চাপের অনুবন্ধী চাপে অন্তর্লিখিত বলা হয়। পাশের চিত্রে বৃত্তস্থ কোণটি APB চাপের ওপর দন্ডায়মান এবং ACB চাপে অন্তর্লিখিত।

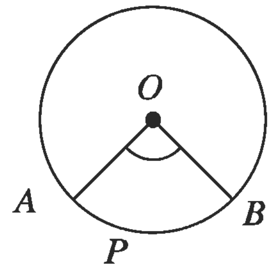
লক্ষণীয় যে, APB ও ACB একে অপরের অনুবন্ধী চাপ।



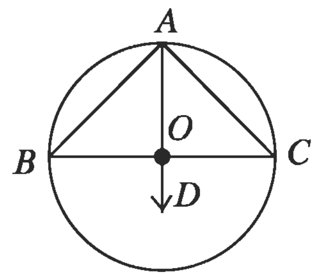
মন্তব্য : বৃত্তের কোনো চাপে অন্তর্লিখিত একটি কোণ হচ্ছে সেই কোণ যার শীর্ষবিন্দু ঐ চাপের একটি অন্তঃস্থ বিন্দু এবং যার এক একটি বাহু ঐ চাপের এক একটি প্রান্তবিন্দু দিয়ে যায়। বৃত্তের কোনো চাপে দন্ডায়মান একটি বৃত্তস্থ **কোণ হচ্ছে** ঐ চাপের অনুবন্ধী চাপে অন্তর্লিখিত একটি কোণ।

কেন্দ্রস্থ কোণ

একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোনো বৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত হলে, কোণটিকে ঐ বৃত্তের একটি কেন্দ্রস্থ কোণ বলা হয় এবং কোণটি বৃত্তে যে চাপ খন্ডিত করে সেই চাপের ওপর তা দন্ডায়মান বলা হয়। পাশের চিত্রের $\angle AOB$ কোণটি একটি কেন্দ্রস্থ কোণ এবং তা APB চাপের ওপর দন্ডায়মান। প্রত্যেক কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তে একটি উপচাপ খন্ডিত করে। চিত্রে APB একটি উপচাপ। বৃত্তের কোনো উপচাপের ওপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বলতে এরূপ কোণকেই বোঝায় যার শীর্ষবিন্দু বৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত এবং যার বাহুদ্বয় ঐ চাপের প্রান্তবিন্দু দুইটি দিয়ে যায়।



অর্ধবৃত্তের ওপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বিবেচনার জন্য ওপরে উল্লেখিত বর্ণনা অর্থবহ নয়। অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রে কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle BOC$ সরলকোণ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle BAC$ সমকোণ।



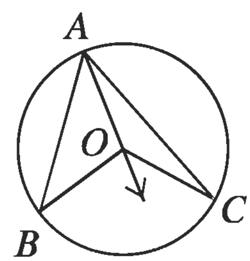
উপপাদ্য ৪

বৃত্তের একই চাপের ওপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC একটি বৃত্ত এবং তার একই উপচাপ BC এর ওপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle BAC$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$ ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 2\angle BAC$

অঙ্কন: মনে করি, AC রেখাংশ কেন্দ্রগামী নয়। এ ক্ষেত্রে A বিন্দু দিয়ে কেন্দ্রগামী রেখাংশ AD আঁকি।



প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔAOB এর বহিঃস্থ কোণ $\angle BOD = \angle BAO + \angle ABO$	[বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]
(২) ΔAOB এ $OA = OB$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
অতএব, $\angle BAO = \angle ABO$	[সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি সমান]
(৩) ধাপ (১) ও (২) থেকে $\angle BOD = 2\angle BAO$.	
(৪) একইভাবে ΔAOC থেকে $\angle COD = 2\angle CAO$	
(৫) ধাপ (৩) ও (৪) থেকে	
$\angle BOD + \angle COD = 2\angle BAO + 2\angle CAO$	[যোগ করে]
অর্থাৎ $\angle BOC = 2\angle BAC$. [প্রমাণিত]	

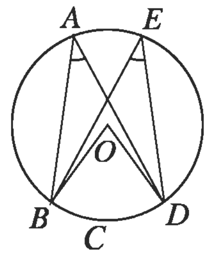
অন্যভাবে বলা যায়, বৃত্তের একই চাপের ওপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক।

কাজ : O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABC বৃত্তের AC কেন্দ্রগামী হলে উপপাদ্য ৪ প্রমাণ কর।

উপপাদ্য ৫

বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান।

মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং বৃত্তের BCD চাপের ওপর দণ্ডায়মান $\angle BAD$ ও $\angle BED$ দুইটি বৃত্তস্থ কোণ।



প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BAD = \angle BED$

অঙ্কন : O, B এবং O, D যোগ করি।

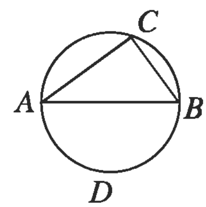
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) এখানে BCD চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle BOD$ । সুতরাং, $\angle BOD = 2\angle BAD$ এবং $\angle BOD = 2\angle BED$ $\therefore \quad 2\angle BAD = 2\angle BED$ বা $\angle BAD = \angle BED$	[একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

উপপাদ্য ৬

অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB একটি ব্যাস এবং $\angle ACB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।



প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ACB =$ এক সমকোণ।

অঙ্কন : AB এর যে পাশে C বিন্দু অবস্থিত, তার বিপরীত পাশে বৃত্তের উপর একটি বিন্দু D নিই।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ADB চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle ACB = \frac{1}{2}$ (কেন্দ্রস্থ সরল কোণ $\angle AOB$) (২) কিন্তু সরলকোণ $\angle AOB$ দুই সমকোণ। $\therefore \quad \angle ACB = \frac{1}{2}$ (দুই সমকোণ) = এক সমকোণ।	[একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক]

অনুসিদ্ধান্ত ১। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস ধরে বৃত্ত অঙ্কন করলে তা সমকৌণিক শীর্ষবিন্দু দিয়ে যাবে।

অনুসিদ্ধান্ত ২। কোনো বৃত্তের অধিচাপে অন্তর্লিখিত কোণ সূক্ষ্মকোণ।

কাজ :

১। প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের উপচাপে অন্তর্লিখিত কোণ স্থূলকোণ।

অনুশীলনী ৮.২

১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তে $ABCD$ একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। AC, BD কর্ণদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AOB + \angle COD = 2\ \angle AEB$.

২। $ABCD$ বৃত্তে AB ও CD জ্যা দুইটি পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাও যে, ΔAED ও ΔBEC সদৃশকোণী।

৩। O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে $\angle ADB + \angle BDC =$ এক সমকোণ। প্রমাণ কর যে, A ও B এবং C এক সরলরেখায় অবস্থিত।

৪। AB ও CD দুইটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে, তাদের সমষ্টি $\angle AEC$ এর দ্বিগুণ।

৫। দেখাও যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।

৬। AB ও CD কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা এবং P ও Q যথাক্রমে তাদের দ্বারা ছিন্ন উপচাপ দুইটির মধ্যবিন্দু। PQ জ্যা AB ও CD জ্যাকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, $AD = AE$.

৮.৩ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ

বৃত্তীয় চতুর্ভুজ বা বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ হলো এমন চতুর্ভুজ যার চারটি শীর্ষবিন্দু বৃত্তের উপর অবস্থিত। এ সকল চতুর্ভুজের একটি বিশেষ ধর্ম রয়েছে। বিষয়টি অনুধাবনের জন্য নিচের কাজটি করি।

কাজ :

বিভিন্ন আকারের কয়েকটি বৃত্তীয় চতুর্ভুজ $ABCD$ আঁক। কয়েকটি বিভিন্ন ব্যাসার্ধের বৃত্ত অঙ্কন করে প্রতিটির উপর চারটি করে বিন্দু নিয়ে চতুর্ভুজগুলো সহজেই আঁকা যায়। চতুর্ভুজের কোণগুলো মেপে নিচের সারণিটি পূরণ কর।

ক্রমিক নং	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
১						
২						
৩						
৪						
৫						

সারণি থেকে কী বোঝা যায় ?

বৃত্ত সংক্রান্ত উপপাদ্য

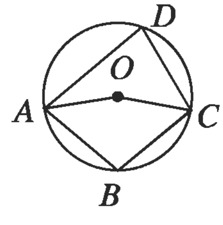
উপপাদ্য ৭

বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $ABCD$ চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ।

এবং $\angle BAD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ।



অঙ্কন : O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) একই চাপ ADC এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle AOC = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle ABC$) অর্থাৎ, $\angle AOC = 2\angle ABC$	একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।
(২) আবার, একই চাপ ABC এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle ADC$) অর্থাৎ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 2\ \angle ADC$ $\therefore\ \angle AOC +$ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 2(\angle ABC + \angle ADC)$ কিন্তু $\angle AOC$ + প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC$ = চার সমকোণ $\therefore\ 2(\angle ABC + \angle ADC$ = চার সমকোণ $\therefore\ \angle ABC + \angle ADC$ = দুই সমকোণ। একইভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, $\angle BAD + \angle BCD$ = দুই সমকোণ।	একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।

অনুসিদ্ধান্ত ১। বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমান।

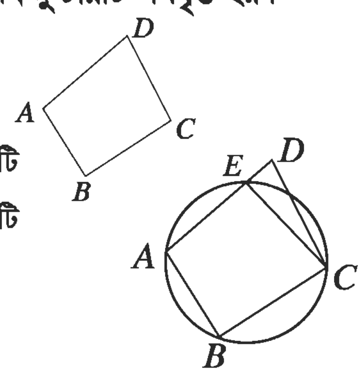
অনুসিদ্ধান্ত ২। বৃত্তে অন্তর্লিখিত সামান্তরিক একটি আয়তক্ষেত্র।

উপপাদ্য ৮

কোনো চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণ সম্পূরক হলে তার শীর্ষবিন্দু চারটি সমবৃত্ত হয়।

মনে করি, $ABCD$ চতুর্ভুজে $\angle ABC + \angle ADC$ = দুই সমকোণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।



অঙ্কন : যেহেতু A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখ নয়, সুতরাং বিন্দু তিনটি দিয়ে যায় এরূপ একটি ও কেবল একটি বৃত্ত আছে। মনে করি, বৃত্তটি AD রেখাংশকে E বিন্দুতে ছেদ করে। C, E যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
অঙ্কন অনুসারে $ABCE$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। সুতরাং $\angle ABC + \angle AEC$ = দুই সমকোণ	বৃত্তে অর্ন্তলিখিত চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।
কিন্তু $\angle ABC + \angle ADC$ = দুই সমকোণ [দেওয়া আছে] $\therefore\ \angle AEC = \angle ADC$ কিন্তু তা অসম্ভব। কারণ ΔCED এর বহিঃস্থ $\angle AEC >$ বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle ADC$ সুতরাং E এবং D বিন্দুদ্বয় ভিন্ন হতে পারে না। E বিন্দু অবশ্যই D বিন্দুর সাথে মিলে যাবে। অতএব, A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।	বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থ যেকোনো কোণের চেয়ে বড়।

অনুশীলনী ৮·৩

১। ΔABC এ $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখন্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

২। প্রমাণ কর যে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যেকোনো কোণের সমদ্বিখণ্ডক ও তার বিপরীত কোণের বহিদ্বিখণ্ডক বৃত্তের ওপরের ছেদ করে।

৩। $ABCD$ একটি বৃত্ত। $\angle CAB$ ও $\angle CBA$ এর সমদ্বিখণ্ডক দুইটি P বিন্দুতে এবং $\angle DBA$ ও $\angle DAB$ কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

৪। O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। পম্রাণ কর যে, $\angle AOD + \angle BOC$ = দুই সমকোণ।

৫। সমান সমান ভূমির ওপর অবস্থিত যে কোনো দুইটি ত্রিভুজের শিরঃকোণদ্বয় সম্পূরক হলে, প্রমাণ কর যে, তাদের পরিবৃত্তদ্বয় সমান হবে।

৬। $ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা যদি $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $BC = CD$।

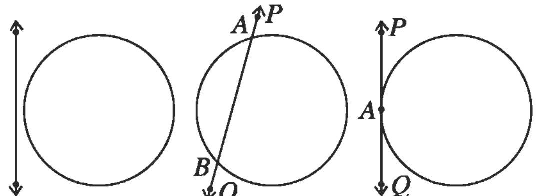
৮·৪ বৃত্তের ছেদক ও স্পর্শক

সমতলে একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার পারস্পরিক অবস্থান বিবেচনা করি। এক্ষেত্রে নিচের চিত্রের প্রদত্ত তিনটি সম্ভাবনা রয়েছে:

(ক) বৃত্ত ও সরলরেখার কোনো সাধারণ বিন্দু নেই,

(খ) সরলরেখাটি বৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করেছে,

(গ) সরলরেখাটি বৃত্তকে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।



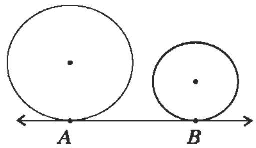
(i) (ii) (iii)

সমতলে একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার সর্বাধিক দুইটি ছেদবিন্দু থাকতে পারে। সমতলস্থ একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার যদি দুইটি ছেদবিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি ছেদক বলা হয় এবং যদি একটি ও কেবল একটি সাধারণ বিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি স্পর্শক বলা হয়। শেষোক্ত ক্ষেত্রে, সাধারণ বিন্দুটিকে ঐ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু বলা হয়। উপরের চিত্রে একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার পারস্পরিক অবস্থান দেখানো হয়েছে। চিত্র–ক এ বৃত্ত ও PQ সরলরেখার কোনো সাধারণ বিন্দু নেই, চিত্র–খ এ PQ সরলরেখাটি বৃত্তকে A ও B দুইটি বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং চিত্র–গ এ PQ সরলরেখাটি বৃত্তকে A বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। PQ বৃত্তটির স্পর্শক ও A এই স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু।

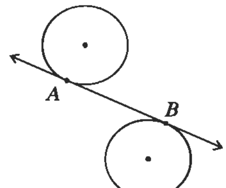
মন্তব্য : বৃত্তের প্রত্যেক ছেদকের ছেদবিন্দুদ্বয়ের অন্তর্বর্তী সকল বিন্দু বৃত্তটির অভ্যন্তরে থাকে।

সাধারণ স্পর্শক

একটি সরলরেখা যদি দুইটি বৃত্তের স্পর্শক হয়, তবে তাকে বৃত্ত দুইটির একটি সাধারণ স্পর্শক বলা হয়।পাশের চিত্রগুলোতে AB উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক। চিত্র–ক ও চিত্র–খ এ স্পর্শবিন্দু একই। চিত্র–গ ও চিত্র–ঘ এ স্পর্শবিন্দু ভিন্ন ভিন্ন।



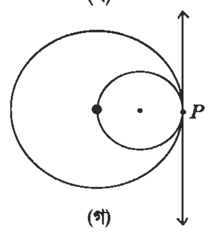
(ক)



(খ)

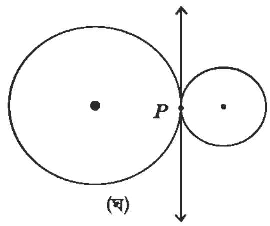
দুইটি বৃত্তের কোনো সাধারণ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু দুইটি ভিন্ন হলে স্পর্শকটিকে
(ক) সরল সাধারণ স্পর্শক বলা হয় যদি বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের একই পার্শ্বে থাকে এবং
(খ) তির্যক সাধারণ স্পর্শক বলা হয় যদি বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের বিপরীত পার্শ্বে থাকে।

চিত্র–গ এ স্পর্শকটি সরল সাধারণ স্পর্শক এবং চিত্র–ঘ এ স্পর্শকটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক।



(গ)

দুইটি বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক যদি বৃত্ত দুইটিকে একই বিন্দুতে স্পর্শ করে তবে ঐ বিন্দুতে বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করে বলা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে, বৃত্ত দুইটির অন্তঃস্পর্শ হয়েছে বলা হয় যদি কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের একই পার্শ্বে থাকেএবং বহিঃস্পর্শ হয়েছে বলা হয় যদি কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের বিপরীত পার্শ্বে থাকে। চিত্র–ক এ বৃত্ত দুইটির অন্তঃস্পর্শ এবং চিত্র–খ এ বহিঃস্পর্শ হয়েছে।



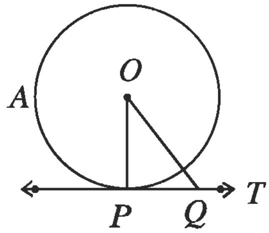
(ঘ)

উপপাদ্য ৯

বৃত্তের যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শকবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর লম্ব।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের ওপরস্থ P বিন্দুতে PT একটি স্পর্শক এবং OP স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ। প্রমাণ করতে হবে যে,

$PT \perp OP.$



অঙ্কন : PT স্পর্শকের ওপর যেকোনো একটি বিন্দু Q নিই এবং O, Q যোগ করি।

প্রমাণ : যেহেতু বৃত্তের P বিন্দুতে PT একটি স্পর্শক, সুতরাং ঐ P বিন্দু ব্যতীত PT এর ওপরস্থ অন্য সকল বিন্দু বৃত্তের বাইরে থাকবে। সুতরাং Q বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে অবস্থিত।

$\therefore$ OQ বৃত্তের ব্যাসার্ধ OP এর চেয়ে বড়, অর্থাৎ, $OQ > OP$ এবং তা স্পর্শ বিন্দু P ব্যতীত PT এর ওপরস্থ Q বিন্দুর সকল অবস্থানের জন্য সত্য।

$\therefore$ কেন্দ্র O থেকে PT স্পর্শকের ওপর OP হল ক্ষুদ্রতম দূরত্ব।

সুতরাং $PT \perp OP.$

অনুসিদ্ধান্ত ১। বৃত্তের কোনো বিন্দুতে একটিমাত্র স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

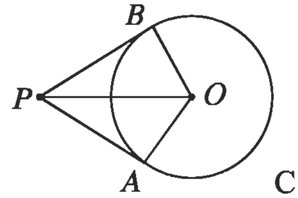
অনুসিদ্ধান্ত ২। স্পর্শ বিন্দুতে স্পর্শকের ওপর অঙ্কিত লম্ব কেন্দ্রগামী।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। বৃত্তের কোনো বিন্দু দিয়ে ঐ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর অঙ্কিত লম্ব উক্ত বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক হয়।

উপপাদ্য ১০

বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানলে, ঐ বিন্দু থেকে স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের P একটি বহিঃস্থ বিন্দু এবং PA ও PB রশ্মিদ্বয় বৃত্তের A ও B বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ করতে হবে যে, $PA = PB$



অঙ্কন : O, A; O, B এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	**যথার্থতা**
(১) যেহেতু PA স্পর্শক এবং OA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ, সেহেতু $PA \perp OA$. $\therefore$ $\angle PAO$ = এক সমকোণ।	[স্পর্শক স্পর্শকবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর লম্ব]
অনুরূপে $\angle PBO$ = এক সমকোণ।	
$\therefore$ ΔPAO এবং ΔPBO উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।	
(২) এখন, ΔPAO ও ΔPBO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে	
অতিভুজ PO = অতিভুজ PO	
এবং $OA = OB$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$\therefore$ $\Delta PAO \cong \Delta PBO$.	[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ– বাহু সর্বসমতা]
$\therefore$ $PA = PB$	

মন্তব্য :

১. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে, স্পর্শবিন্দু ছাড়া প্রত্যেক বৃত্তের অন্য সকল বিন্দু অপর বৃত্তের বাইরে থাকবে।

২. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করলে, স্পর্শবিন্দু ছাড়া ছোট বৃত্তের অন্য সকল বিন্দু বড় বৃত্তটির অভ্যন্তরে থাকবে।

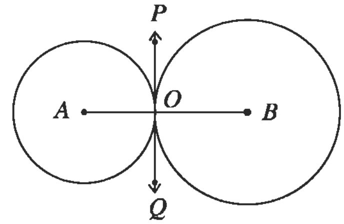
উপপাদ্য ১১

দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শ বিন্দু সমরেখ।

মনে করি, A এবং B কেন্দ্রবিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত পরস্পর O বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, A, O এবং B বিন্দু তিনটি সমরেখ।

অঙ্কন : যেহেতু বৃত্তদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে স্পর্শ করেছে, সুতরাং O বিন্দুতে তাদের একটি সাধারণ স্পর্শক থাকবে। এখন O বিন্দুতে সাধারণ স্পর্শক POQ অঙ্কন করি এবং O, A ও O, B যোগ করি।

প্রমাণ :



A কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে OA স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ এবং POQ স্পর্শক।

সুতরাং $\angle POA$ = এক সমকোণ। তদ্রুপ $\angle POB$ = এক সমকোণ

$\angle POA + \angle POB$ = এক সমকোণ + এক সমকোণ = দুই সমকোণ।

বা $\angle AOB$ = দুই সমকোণ

অর্থাৎ, $\angle AOB$ একটি সরলকোণ। $\therefore$ A, O এবং B বিন্দুত্রয় সমরেখ।

অনুসিদ্ধান্ত ১। দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে, কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের সমষ্টির সমান।

অনুসিদ্ধান্ত ২। দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করলে, কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের অন্তরের সমান।

কাজ : ১। প্রমাণ কর যে, দুইটি বৃত্ত পরস্পর অন্তঃস্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু সমরেখ হবে।

অনুশীলনী ৮·৪

১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানা হল। প্রমাণ কর যে, OP সরলরেখা স্পর্শ–জ্যা এর লম্বদ্বিখণ্ডক।

২। দেওয়া আছে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং PA ও PB স্পর্শকদ্বয় বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ কর যে, PO, $\angle APB$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৩। প্রমাণ কর যে, দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রিক হলে এবং বৃহত্তর বৃত্তটির কোনো জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে স্পর্শ করলে উক্ত জ্যা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

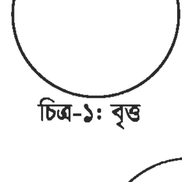
৪। AB কোনো বৃত্তের ব্যাস এবং BC ব্যাসার্ধের সমান একটি জ্যা। যদি A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ACD একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

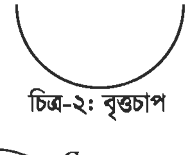
৫। প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত বাহু কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ ধারণ করে, তারা পরস্পর সম্পূরক।

৮·৫ বৃত্ত সম্পর্কীয় সম্পাদ্য

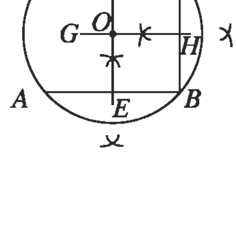
সম্পাদ্য ১

একটি বৃত্ত বা বৃত্তচাপ দেওয়া আছে, কেন্দ্র নির্ণয় করতে হবে।


চিত্র-১: বৃত্ত


চিত্র-২: বৃত্তচাপ

একটি বৃত্ত চিত্র–১ বা বৃত্তচাপ চিত্র–২ দেওয়া আছে, বৃত্তটির বা বৃত্তচাপটির কেন্দ্র নির্ণয় করতে হবে।



অঙ্কন : প্রদত্ত বৃত্তে বা বৃত্তচাপে তিনটি বিন্দু A, B ও C নিই। A, B এবং B, C যোগ করি। AB ও BC জ্যা দুইটির লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EF ও GH রেখাংশ দুইটি টানি। মনে করি, তারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং, O বিন্দুই বৃত্তের বা বৃত্তচাপের কেন্দ্র।

প্রমাণ : EF রেখাংশ AB জ্যা এর এবং GH রেখাংশ BC জ্যা এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক। কিন্তু EF ও GH উভয়ে কেন্দ্রগামী এবং O তাদের সাধারণ ছেদ বিন্দু। সুতরাং O বিন্দুই বৃত্তের বা বৃত্তচাপের কেন্দ্র।

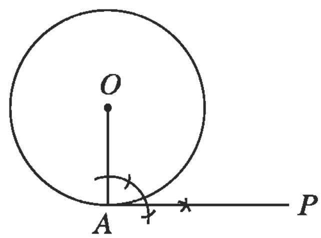
বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন

আমরা জেনেছি যে, বৃত্তের ভিতরে অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তের স্পর্শক আঁকা যায় না। বিন্দুটি যদি বৃত্তের ওপর থাকে তাহলে উক্ত বিন্দুতে বৃত্তের একটিমাত্র স্পর্শক অঙ্কন করা যায়। স্পর্শকটি বর্ণিত বিন্দুতে অঙ্কিত ব্যাসার্ধের উপর লম্ব হয়। সুতরাং, বৃত্তস্থিত কোনো বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করতে হলে বর্ণিত বিন্দুতে ব্যাসার্ধ অঙ্কন করে ব্যাসার্ধের উপর লম্ব আঁকতে হবে। আবার বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে অবস্থিত হলে তা থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক আঁকা যাবে।

সম্পাদ্য ২

বৃত্তের কোনো বিন্দুতে একটি স্পর্শক আঁকতে হবে।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে A একটি বিন্দু। A বিন্দুতে বৃত্তটিতে একটি স্পর্শক আঁকতে হবে।



অঙ্কন :

(১) O, A যোগ করি। A বিন্দুতে OA এর উপর AP লম্ব আঁকি। তাহলে AP নির্ণয় স্পর্শক।

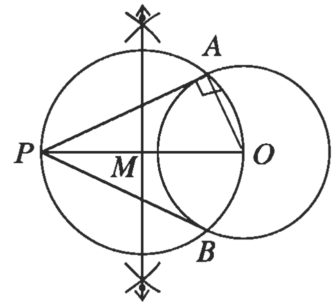
প্রমাণ : OA রেখাংশ A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ এবং AP তার ওপর লম্ব। সুতরাং, AP রেখাই নির্ণেয় স্পর্শক।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : বৃত্তের কোনো বিন্দুতে একটিমাত্র স্পর্শক আঁকা হয়।

সম্পাদ্য ৩

বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তটির স্পর্শক আঁকতে হবে।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের P একটি বহিঃস্থ বিন্দু। P বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তে স্পর্শক আঁকতে হবে।



অঙ্কন :

(১) P, O যোগ করি। PO রেখাংশের মধ্যবিন্দু M নির্ণয় করি।

(২) এখন M কে কেন্দ্র করে MO এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। মনে করি, নতুন অঙ্কিত বৃত্তটি প্রদত্ত বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) A, P এবং B, P যোগ করি।

তাহলে, AP , BP উভয়েই নির্ণেয় স্পর্শক।

প্রমাণ : A, O এবং B, O যোগ করি। APB বৃত্তে PO ব্যাস।

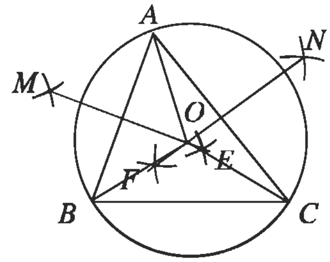
$\therefore \angle PAO$ = এক সমকোণ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ]

সুতরাং, OA রেখাংশ AP রেখাংশের ওপর লম্ব। অতএব, O কেন্দ্রিক বৃত্তের A বিন্দুতে AP রেখাংশ একটি স্পর্শক। অনুরূপভাবে, BP রেখাংশও একটি স্পর্শক।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তে দুইটি ও কেবল দুইটি স্পর্শক আঁকা যায়।

সম্পাদ্য ৪

কোনো নির্দিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।



মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। এর পরিবৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ, এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু A, B ও C বিন্দু দিয়ে যায়।

অঙ্কন :

(১) AB ও AC রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EM ও FN রেখাংশ আঁকি। মনে করি, তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

(২) A, O যোগ করি। O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।

তাহলে, বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী হবে এবং এই বৃত্তটিই ΔABC এর নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

প্রমাণ : B, O এবং C, O যোগ করি। O বিন্দুটি AB এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক EM এর ওপর অবস্থিত।

$\therefore \quad OA = OB$, একইভাবে, $OA = OC$

$\therefore \quad OA = OB = OC$

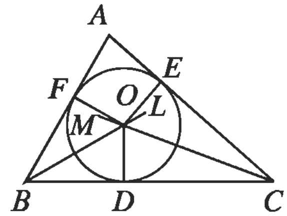
সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি A, B ও C বিন্দু তিনটি দিয়ে যাবে। সুতরাং এই বৃত্তটিই ΔABC এর পরিবৃত্ত।

> **কাজ :** ওপরের চিত্রে একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁকা হয়েছে। স্থূলকোণী এবং সমকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।

লক্ষণীয় যে, সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পরিকেন্দ্র ত্রিভুজের অভ্যন্তরে, স্থূলকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পরিকেন্দ্র ত্রিভুজের বহির্ভাগে এবং সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পরিকেন্দ্র অতিভুজের ওপর অবস্থিত।

সম্পাদ্য ৫

কোনো নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত আঁকতে হবে।



মনে করি, ΔABC একটি ত্রিভুজ। এর অন্তর্বৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ, ΔABC এর ভিতরে এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা BC, CA ও AB বাহু তিনটির প্রত্যেকটিকে স্পর্শ করে।

অঙ্কন : $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ এর সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে BL ও CM আঁকি। মনে করি, তারা O বিন্দুতে ছেদ করে। O থেকে BC এর ওপর OD লম্ব আঁকি এবং মনে করি, তা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। O কে কেন্দ্র করে OD এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে, এই বৃত্তটিই নির্ণেয় অন্তর্বৃত্ত।

প্রমাণ : O থেকে AC ও AB এর ওপর যথাক্রমে OE ও OF লম্ব টানি। মনে করি, লম্বদ্বয় বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে।

O বিন্দু $\angle ABC$ এর দ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত।

$\therefore \quad OF = OD$

অনুরূপভাবে, O বিন্দু $\angle ACB$ এর দ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত বলে $OE = OD$

$\therefore \quad OD = OE = OF$

সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OD এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে তা D, E এবং F বিন্দু দিয়ে যাবে।

আবার, OD, OE ও OF এর প্রান্তবিন্দুতে যথাক্রমে BC, AC ও AB লম্ব।

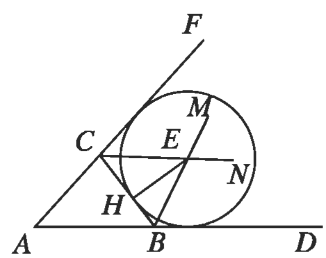
সুতরাং বৃত্তটি ΔABC এর ভিতরে থেকে এর বাহু তিনটিকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করে।

অতএব, DEF বৃত্তটিই ΔABC এর অন্তর্বৃত্ত হবে।

সম্পাদ্য ৬

কোনো নির্দিষ্ট ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে।

মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। এর বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ, এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা ত্রিভুজের একটি বাহুকে এবং অপর দুই বাহুর বর্ধিতাংশকে স্পর্শ করে।



অঙ্কন : AB ও AC বাহুদ্বয়কে যথাক্রম D ও F পর্যন্ত বর্ধিত করি। $\angle DBC$ ও $\angle FCB$ এর সমদ্বিখণ্ডক BM এবং CN আঁকি। মনে করি, E তাদের ছেদ বিন্দু। E থেকে BC এর ওপর EH লম্ব আঁকি এবং মনে করি তা BC কে H বিন্দুতে ছেদ করে। E কে কেন্দ্র করে EH এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।

তাহলে, এই বৃত্তটিই নির্ণেয় বহির্বৃত্ত।

প্রমাণ : E থেকে BD ও CF রেখাংশের ওপর যথাক্রমে EG ও EL লম্ব টানি। মনে করি, লম্বদ্বয়, রেখাংশদ্বয়কে যথাক্রমে G ও L বিন্দুতে ছেদ করে।

E বিন্দুটি $\angle DBC$ এর দ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত

$\therefore \quad EH = EG$

অনুরূপভাবে, E বিন্দুটি $\angle FCB$ এর দ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত বলে $EH = EL$

$\therefore \quad EH = EG = EL$

সুতরাং E কে কেন্দ্র করে EL এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত H, G এবং L বিন্দু দিয়ে যাবে।

আবার, EH, EG ও EL এর প্রান্তবিন্দুতে যথাক্রমে BC, BD ও CF রেখাংশ তিনটি লম্ব।

সুতরাং বৃত্তটি রেখাংশ তিনটিকে যথাক্রমে H, G ও L বিন্দু তিনটিতে স্পর্শ করে।

অতএব, HGL বৃত্তটিই ΔABC এর বহিবৃত্ত হবে।

মন্তব্য : কোনো ত্রিভুজের তিনটি বহির্বৃত্ত আঁকা যায়।

কাজ : ১। ত্রিভুজের অপর দুইটি বহির্বৃত্ত আঁক।

অনুশীলনী ৮·৫

১. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

i বৃত্তে স্পর্শক স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর লম্ব

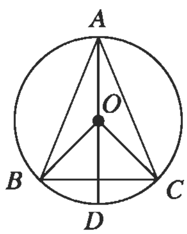
ii অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ

iii বৃত্তের সকল সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী

নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. i ও iii

গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii



ওপরের চিত্র অনুযায়ী ২ ও ৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

২. $\angle BOD$ এর পরিমাণ হবে–

ক. $\frac{1}{2}\angle BAC$ খ. $\frac{1}{2}\angle BAD$

গ. $2\angle BAC$ ঘ. $2\angle BAD$

৩. বৃত্তটি ABC ত্রিভুজের–

ক. অন্তর্বৃত্ত খ. পরিবৃত্ত

গ. বহি:বৃত্ত ঘ. উপবৃত্ত

৪. কোনো বৃত্তের অধিচাপে অন্তর্লিখিত কোণ–

ক. সূক্ষ্মকোণ খ. সমকোণ

গ. স্থূল কোণ ঘ. পূরককোণ

৫. কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয়।

৬. কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব হয়।

৭. কোনো বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক আঁক যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়।

৮. 3 সে.মি., 4 সে.মি. ও 4·5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁক এবং এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

৯. 5 সে.মি বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর AC বাহুকে স্পর্শ করিয়ে একটি বহির্বৃত্ত আঁক।

১০. একটি বর্গের অন্তর্বৃত্ত ও পরির্বৃত্ত আঁক।

১১. প্রমাণ কর যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভূজের সমান বাহুদ্বয়কে ব্যাস ধরে দুইটি বৃত্ত অঙ্কন করলে, তারা ভূমির মধ্যবিন্দুকে পরস্পর ছেদ করে।

১২. প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভূজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ও বিপরীত শীর্ষের সংযোজক রেখাংশ অতিভুজের অর্ধেক।

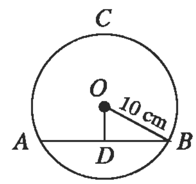
১৩. ABC একটি ত্রিভুজ। AB কে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত যদি BC বাহুকে D বিন্দুকে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, AC বাহুকে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তও D বিন্দু দিয়ে যাবে।

১৪. AB ও CD একই বৃত্তে দুইটি সমান্তরাল জ্যা। প্রমাণ কর যে, চাপ AC = চাপ BD .

১৫. O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$.

১৬. দুইটি সমান ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তের সাধারণ জ্যা AB । B বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত কোনো সরলরেখা যদি বৃত্ত দুইটির সাথে P ও Q বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ΔOAQ সমদ্বিবাহু।

১৭. O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে জ্যা $AB = x$ সে.মি. $OD \perp AB$



পাশের চিত্র অনুযায়ী নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

ক. বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, D, AB এর মধ্যবিন্দু।

গ. $OD = (\frac{x}{2} - 2)$ সে. মি. হলে x এর মান নির্ণয় কর।

১৮. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সে. মি. 5 সে. মি. ও 6 সে. মি.

ওপরের তথ্য অনুযায়ী নিম্নের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

ক. ত্রিভুজটি অঙ্কন কর

খ. ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।

গ. ত্রিভুজের পরিবৃত্তের বাহিরে যে কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করে দেখাও যে স্পর্শকদ্বয়ের দূরত্ব সমান হয়।

নবম অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

(Trigonometric Ratios)

আমরা প্রতিনিয়ত ত্রিভুজ, বিশেষ করে সমকোণী ত্রিভুজের ব্যবহার করে থাকি। আমাদের চারিদিকের পরিবেশে নানা উদাহরণ দেখা যায় যেখানে কল্পনায় সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করা যায়। সেই প্রাচীন যুগে মানুষ জ্যামিতির সাহায্যে নদীর তীরে দাঁড়িয়ে নদীর প্রস্থ নির্ণয় করার কৌশল শিখেছিল। গাছে না উঠেও গাছের ছায়ার সঙ্গে লাঠির তুলনা করে নিখুঁতভাবে গাছের উচ্চতা মাপতে শিখেছিল। এই গাণিতিক কৌশল শেখানোর জন্য সৃষ্টি হয়েছে ত্রিকোণমিতি নামে গণিতের এক বিশেষ শাখা। Trigonometry শব্দটি গ্রিক শব্দ tri(অর্থ তিন) gon(অর্থ ধার) metron(অর্থ পরিমাপ) দ্বারা গঠিত। ত্রিকোণমিতিতে ত্রিভুজের বাহু ও কোণের মধ্যে সম্পর্ক বিষয়ে পাঠদান করা হয়। মিশর ও ব্যাবিলনীয় সভ্যতায় ত্রিকোণমিতি ব্যবহারের নিদর্শন রয়েছে। মিশরীয়রা ভূমি জরিপ ও প্রকৌশল কাজে এর বহুল ব্যবহার করত বলে ধারণা করা হয়। এর সাহায্যে জ্যোতির্বিদগণ পৃথিবী থেকে দূরবর্তী গ্রহ–নক্ষত্রের দূরত্ব নির্ণয় করতেন। অধুনা ত্রিকোণমিতির ব্যবহার গণিতের সকল শাখায়। ত্রিভুজ সংক্রান্ত সমস্যার সমাধান, নেভিগেশন ইত্যাদি ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতির ব্যাপক ব্যবহার হয়ে থাকে। গণিতের গুরুত্বপূর্ণ জ্যোতির্বিজ্ঞান শাখাসহ ক্যালকুলাসে এর বহুল ব্যবহার রয়েছে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বর্ণনা করতে পারবে।
- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবে।
- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর ধ্রুবতা যাচাই করে প্রমাণ ও গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- জ্যামিতিক পদ্ধতিতে $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- 0° ও 90° কোণের অর্থপূর্ণ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান নির্ণয় করে প্রয়োগ করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি প্রমাণ করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলির প্রয়োগ করতে পারবে।

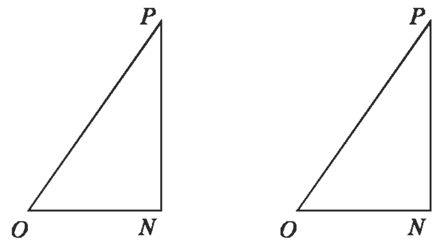
৯.১ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর নামকরণ

আমরা জানি, সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো অতিভুজ, ভূমি ও উন্নতি নামে অভিহিত হয়। ত্রিভুজের আনুভূমিক অবস্থানের জন্য এ নামসমূহ সার্থক। আবার সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের একটির সাপেক্ষে অবস্থানের প্রেক্ষিতেও বাহুগুলোর নামকরণ করা হয়। যথা:

ক. 'অতিভুজ', সমকোণী ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু যা সমকোণের বিপরীত বাহু

খ. 'বিপরীত বাহু', যা হলো প্রদত্ত কোণের সরাসরি বিপরীত দিকের বাহু

গ. 'সন্নিহিত বাহু', যা প্রদত্ত কোণ সৃষ্টিকারী একটি রেখাংশ।



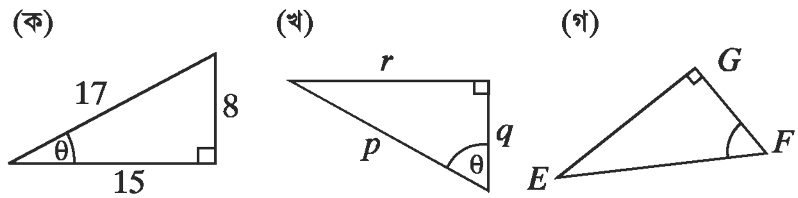
$\angle PON$ কোণের জন্য অতিভুজ OP , সন্নিহিত বাহু ON , বিপরীত বাহু PN	$\angle OPN$ কোণের জন্য অতিভুজ OP , সন্নিহিত বাহু PN , বিপরীত বাহু ON

জ্যামিতিক চিত্রের শীর্ষবিন্দু চিহ্নিত করার জন্য বড় হাতের বর্ণ ও বাহু নির্দেশ করতে ছোট হাতের বর্ণ ব্যবহার করা হয়। কোণ নির্দেশের জন্য প্রায়শই গ্রিক বর্ণ ব্যবহৃত হয়। গ্রিক বর্ণমালার ছয়টি বহুল ব্যবহৃত বর্ণ হলো :

alpha α	beta β	gamma γ	theta θ	phi ϕ	omega ω
(আলফা)	(বিটা)	(গামা)	(থিটা)	(ফাই)	(ওমেগা)

প্রাচীন গ্রিসের বিখ্যাত সব গণিতবিদদের হাত ধরেই জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতিতে গ্রিক বর্ণগুলো ব্যবহার হয়ে আসছে।

উদাহরণ ১। θ কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহু চিহ্নিত কর।



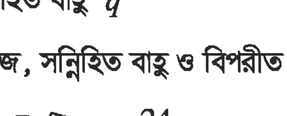
সমাধান :

(ক) অতিভুজ 17 একক
বিপরীত বাহু 8 একক
সন্নিহিত বাহু 15 একক

(খ) অতিভুজ p
বিপরীত বাহু r
সন্নিহিত বাহু q

(গ) অতিভুজ EF
বিপরীত বাহু EG
সন্নিহিত বাহু FG

উদাহরণ ২। α ও β কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।



(ক) α **কোণের জন্য**

অতিভুজ 25 একক

বিপরীত বাহু 24 একক

সন্নিহিত বাহু 7 একক

(খ) β **কোণের জন্য**

অতিভুজ 25 একক

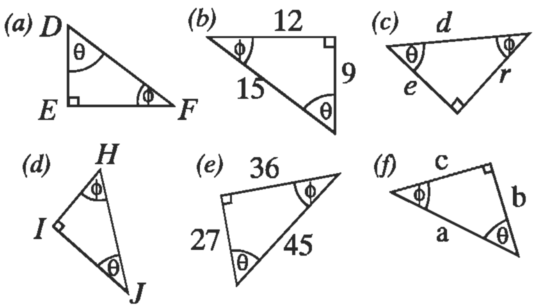
বিপরীত বাহু 7 একক

সন্নিহিত বাহু 24 একক

কাজ :

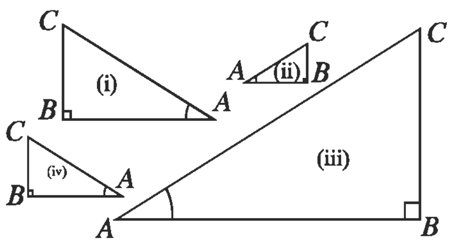
θ ও ϕ কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহু নির্দেশ কর।

(i) কোণ θ (ii) কোণ ϕ



৯·২ সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাতসমূহের ধ্রুবতা

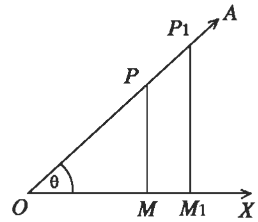
কাজ : নিচের চারটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য মেপে সারণিটি পূরণ কর। ত্রিভুজের অনুপাতগুলো সম্পর্কে কী লক্ষ কর ?



বাহুর দৈর্ঘ্য			অনুপাত (কোণের সাপেক্ষে)		
BC	AB	AC	BC/AC	AB/AC	BC/AB

মনে করি, $\angle XOA$ একটি সূক্ষ্মকোণ। OA বাহুতে যেকোনো একটি বিন্দু P নিই। P থেকে OX বাহু পর্যন্ত PM লম্ব টানি। ফলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ POM গঠিত হলো। এই ΔPOM এর PM, OM ও OP বাহুগুলোর যে তিনটি অনুপাত পাওয়া যায় তাদের মান OA বাহুতে নির্বাচিত P বিন্দুর অবস্থানের ওপর নির্ভর করে না।

$\angle XOA$ কোণের OA বাহুতে যেকোনো বিন্দু P ও P_1 থেকে OX বাহু পর্যন্ত যথাক্রমে PM ও P_1M_1 লম্ব অঙ্কন করলে ΔPOM ও ΔP_1OM_1 দুইটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজ গঠিত হয়।



এখন, ΔPOM ও ΔP_1OM_1 **সদৃশ** হওয়ায়,

$$\frac{PM}{P_1M_1} = \frac{OP}{OP_1} \text{ বা, } \frac{PM}{OP} = \frac{P_1M_1}{OP_1} \ ..... (i)$$

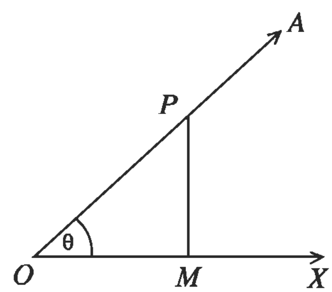
$$\frac{OM}{OM_1} = \frac{OP}{OP_1} \text{ বা, } \frac{OM}{OP} = \frac{OM_1}{OP_1} \ .... (ii)$$

$$\frac{PM}{P_1M_1} = \frac{OM}{OM_1} \text{ বা, } \frac{PM}{OM} = \frac{P_1M_1}{OM_1} \ .... (iii)$$

অর্থাৎ, অনুপাতসমূহের প্রত্যেকটি ধ্রুবক। এই অনুপাতসমূহকে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলে।

৯·৩ সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করি, $\angle XOA$ একটি সূক্ষ্মকোণ। OA বাহুতে যেকোনো একটি বিন্দু P নিই। P থেকে OX বাহু পর্যন্ত PM লম্ব টানি। ফলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ POM গঠিত হলো। এই ΔPOM এর PM, OM ও OP বাহুগুলোর যে ছয়টি অনুপাত পাওয়া যায় তাদের $\angle XOA$ এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলা হয় এবং তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি সুনির্দিষ্ট নামে নামকরণ করা হয়।



$\angle XOA$ সাপেক্ষে সমকোণী ত্রিভুজ POM এর PM বিপরীত বাহু, OM সন্নিহিত বাহু, OP অতিভুজ। এখন $\angle XOA = \theta$ ধরলে, θ কোণের যে ছয়টি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত পাওয়া যায় তা নিচে বর্ণনা করা হলো।

চিত্র থেকে,

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} \quad [\ \theta \text{ কোণের সাইন (sine)}]$$

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} \quad [\theta \text{ কোণের কোসাইন cosine}]$$

$$\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} \quad [\theta \text{ কোণের ট্যানজেন্ট tangent}]$$

এবং এদের বিপরীত অনুপাত

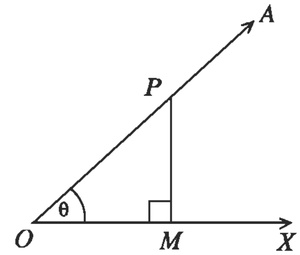
$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad [\theta \text{ কোণের কোসেক্যান্ট cosecant}]$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad [\theta \text{ কোণের সেক্যান্ট secant}]$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \quad [\theta \text{ কোণের কোট্যানজেন্ট cotangent}]$$

লক্ষ করি, $\sin\theta$ প্রতীকটি θ কোণের সাইন–এর অনুপাতকে বোঝায়; $\sin$ ও θ এর গুণফলকে নয়। θ বাদে $\sin$ আলাদা কোনো অর্থ বহন করে না। ত্রিকোণমিতিক অন্যান্য অনুপাতগুলোর ক্ষেত্রেও বিষয়টি প্রযোজ্য।

৯·৪ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর সম্পর্ক



মনে করি, $\angle XOA = \theta$ একটি সূক্ষ্মকোণ।

পাশের চিত্র সাপেক্ষে, সংজ্ঞানুযায়ী,

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP},\quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{OP}{PM}$$

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP},\quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{OP}{OM}$$

$$\tan\theta = \frac{PM}{OM},\quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{OM}{PM}$$

আবার, $\tan\theta = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{\frac{PM}{OP}}{\frac{OM}{OP}}$ [লব ও হরকে OP দ্বারা ভাগ করে]

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

এবং একইভাবে,

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

৯·৫ ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি

(i) $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = \left(\dfrac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\dfrac{OM}{OP}\right)^2$

$$= \frac{PM^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2} = \frac{PM^2 + OM^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2}$$ [পিথাগোরাসের সূত্র]

$$= 1$$

বা, $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

$$\therefore\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

মন্তব্য : পূর্ণসংখ্যা সূচক n এর জন্য $(\sin\theta)^n$ কে $\sin^n\theta$ ও $(\cos\theta)^n$ কে $\cos^n\theta$ ইত্যাদি লেখা হয়।

(ii) $\sec^2\theta = (\sec\theta)^2 = \left(\dfrac{OP}{OM}\right)^2$

$$= \frac{OP^2}{OM^2} = \frac{PM^2 + OM^2}{OM^2}$$ [OP সমকোণী ΔPOM এর অতিভুজ বলে]

$$= \frac{PM^2}{OM^2} + \frac{OM^2}{OM^2}$$

$$= 1 + \left(\frac{PM}{OM}\right)^2 = 1 + (\tan\theta)^2 = 1 + \tan^2\theta$$

$\therefore\ \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

বা, $\boxed{\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1}$

বা, $\boxed{\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1}$

(*iii*) $\operatorname{cosec}^2\theta = (\operatorname{cosec}\theta)^2 = \left(\frac{OP}{PM}\right)^2$

$$= \frac{OP^2}{PM^2} = \frac{PM^2 + OM^2}{PM^2}$$ [OP সমকোণী ΔPOM এর অতিভুজ বলে]

$$= \frac{PM^2}{PM^2} + \frac{OM^2}{PM^2} = 1 + \left(\frac{OM}{PM}\right)^2$$

$$= 1 + (\cot\theta)^2 = 1 + \cot^2\theta$$

$\therefore\ \boxed{\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1}$ এবং $\boxed{\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1}$

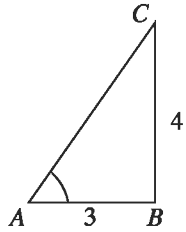
কাজ

১। নিচের ত্রিকোণমিতিক সূত্রগুলো সহজে মনে রাখার জন্য তালিকা তৈরি কর।

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

উদাহরণ ১। $\tan A = \frac{4}{3}$ হলে, A কোণের অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\tan A = \frac{4}{3}$.



অতএব, A কোণের বিপরীত বাহু = 4, সন্নিহিত বাহু = 3

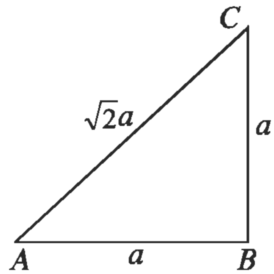
অতিভুজ = $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

সুতরাং, $\sin A = \frac{4}{5}$, $\cos A = \frac{3}{5}$, $\cot A = \frac{3}{4}$

$\operatorname{cosec} A = \frac{5}{4}$, $\sec A = \frac{5}{3}$.

উদাহরণ ২। ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ কোণটি সমকোণ। $\tan A = 1$ হলে $2\sin A\cos A = 1$ এর সত্যতা যাচাই কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\tan A = 1$.



অতএব, বিপরীত বাহু = সন্নিহিত বাহু = a

অতিভুজ = $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$

সুতরাং, $\sin A = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos A = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

এখন বামপক্ষ = $2\sin A\cos A = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$

= ডানপক্ষ ।

$\therefore 2\sin A\cos A = 1$ উক্তিটি সত্য।

কাজ :

১। ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, $AB = 29$ সে.মি., $BC = 21$ সে.মি. এবং $\angle ABC = \theta$ হলে, $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ এর মান বের কর।

উদাহরণ ৩। প্রমাণ কর যে, $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta.\operatorname{cosec}\theta$.

সমাধান :

বামপক্ষ = $\tan\theta + \cot\theta$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta} \quad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \operatorname{cosec}\theta\cdot\sec\theta$$

$= \sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ ৪। প্রমাণ কর যে, $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta.\operatorname{cosec}^2\theta$.

সমাধান : বামপক্ষ = $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta \sin^2\theta} \quad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$= \sec^2\theta \cdot \operatorname{cosec}^2\theta$$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ ৫। প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{1+\sin^2\theta} + \frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2\theta} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{1}{1+\sin^2\theta} + \frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2\theta}$

$$= \frac{1}{1+\sin^2\theta} + \frac{1}{1+\frac{1}{\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{1+\sin^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1+\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta}$$

= 1 = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ ৬। প্রমাণ কর : $\frac{1}{2-\sin^2 A} + \frac{1}{2+\tan^2 A} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{1}{2-\sin^2 A} + \frac{1}{2+\tan^2 A}$

$$= \frac{1}{2-\sin^2 A} + \frac{1}{2+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{1}{2-\sin^2 A} + \frac{\cos^2 A}{2\cos^2 A + \sin^2 A}$$

$$= \frac{1}{2-\sin^2 A} + \frac{\cos^2 A}{2(1-\sin^2 A) + \sin^2 A}$$

$$= \frac{1}{2-\sin^2 A} + \frac{\cos^2 A}{2 - 2\sin^2 A + \sin^2 A}$$

$$= \frac{1}{2-\sin^2 A} + \frac{1-\sin^2 A}{2-\sin^2 A}$$

$$= \frac{2-\sin^2 A}{2-\sin^2 A}$$

= 1 = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ৭। প্রমাণ কর : $\frac{\tan A}{\sec A+1}-\frac{\sec A-1}{\tan A}=0$

সমাধান : বামপক্ষ $=\frac{\tan A}{\sec A+1}-\frac{\sec A-1}{\tan A}$

$=\frac{\tan^2 A-(\sec^2 A-1)}{(\sec A+1)\tan A}$

$=\frac{\tan^2 A-\tan^2 A}{(\sec A+1)\tan A}$ $[\because \sec^2 A-1=\tan^2 A]$

$=\frac{0}{(\sec A+1)\tan A}$

$=0=$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ৮। প্রমাণ কর : $\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}}=\sec A-\tan A$

সমাধান : বামপক্ষ $=\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}}$

$=\sqrt{\frac{(1-\sin A)(1-\sin A)}{(1+\sin A)(1-\sin A)}}$ [লব ও হরকে $\sqrt{(1-sinA)}$ দ্বারা গুণ করে]

$=\sqrt{\frac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}$

$=\sqrt{\frac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}}$

$=\frac{1-\sin A}{\cos A}$

$=\frac{1}{\cos A}-\frac{\sin A}{\cos A}$

$=\sec A-\tan A$

$=$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ৯। $\tan A+\sin A=a$ এবং $\tan A-\sin A=b$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a^2-b^2=4\sqrt{ab}$.

সমাধান : এখানে প্রদত্ত, $\tan A+\sin A=a$ এবং $\tan A-\sin A=b$

বামপক্ষ $=a^2-b^2$

$=(\tan A+\sin A)^2-(\tan A-\sin A)^2$

$=4\tan A\sin A$ $[\because (a+b)^2-(a-b)^2=4ab]$

$= 4\sqrt{\tan^2 A \sin^2 A}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A\,(1-\cos^2 A)}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A - \tan^2 A \cdot \cos^2 A}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A - \sin^2 A}$

$= 4\sqrt{(\tan A + \sin A)(\tan A - \sin A)}$

$= 4\sqrt{ab}$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

কাজ : ১। $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos^4\theta + \cos^2 A = 1$

২। $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan^4 A - \tan^2 A = 1$

উদাহরণ ১০। $\sec A + \tan A = \frac{5}{2}$ হলে, $\sec A - \tan A$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে প্রদত্ত, $\sec A + \tan A = \frac{5}{2}$.............(i)

আমরা জানি, $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

বা, $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$

বা, $(\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A) = 1$

বা, $\frac{5}{2}(\sec A - \tan A) = 1$ [(i) হতে]

$\therefore \quad \sec A - \tan A = \frac{2}{5}$

অনুশীলনী ৯.১

১। নিচের গাণিতিক উক্তিগুলোর সত্য–মিথ্যা যাচাই কর। তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

ক. $\tan A$ এর মান সর্বদা 1 এর চেয়ে কম

খ. $\cot A$ হলো cot ও A এর গুণফল

গ. A এর কোন মানের জন্য $\sec A = \frac{12}{5}$

ঘ. cos হলো cotangent এর সংক্ষিপ্ত রূপ

২। $\sin A = \frac{3}{4}$ হলে, A কোণের অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর।

৩। দেওয়া আছে, $15\cot A = 8$, $\sin A$ ও $\sec A$ এর মান নির্ণয় কর।

৪। ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, $AB = 13$ সে.মি., $BC = 12$ সে.মি. এবং $\angle ABC = \theta$ হলে, $\sin\theta$, $\cos\theta$ ও $\tan\theta$ এর মান বের কর।

৫। ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ কোণটি সমকোণ। $\tan A = \sqrt{3}$ হলে, $\sqrt{3}\sin A \cos A = 4\frac{3}{4}$ এর সত্যতাযাচাই কর।

প্রমাণ কর (৬ – ২০) :

৬। (*i*) $\frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = 1$; (*ii*) $\frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1$; (*iii*) $\frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = 1$;

৭। (*i*) $\frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} + \frac{\cos A}{\sec A} = 1$; (*ii*) $\frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A} = 1$.

(*iii*) $\frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2 A} = 1$

৮। (*i*) $\frac{\tan A}{1-\cot A} + \frac{\cot A}{1-\tan A} = \sec A \operatorname{cosec} A + 1$; (*ii*) $\frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{1+\cot^2 A} = 1$

৯। $\frac{\cos A}{1-\tan A} + \frac{\sin A}{1-\cot A} = \sin A + \cos A.$

১০। $\tan A\sqrt{1-\sin^2 A} = \sin A.$

১১। $\frac{\sec A + \tan A}{\operatorname{cosec} A + \cot A} = \frac{\operatorname{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A}$

১২। $\frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A - 1} + \frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2\sec^2 A.$

১৩। $\frac{1}{1+\sin A} + \frac{1}{1-\sin A} = 2\sec^2 A.$

১৪। $\frac{1}{\operatorname{cosec} A - 1} - \frac{1}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2\tan^2 A.$

১৫। $\frac{\sin A}{1-\cos A} + \frac{1-\cos A}{\sin A} = 2 \operatorname{cosec} A.$

১৬। $\frac{\tan A}{\sec A + 1} - \frac{\sec A - 1}{\tan A} = 0$

১৭। $(\tan\theta + \sec\theta)^2 = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

১৮। $\frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A \,.\, \tan B.$

১৯। $\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A.$

২০। $\sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = \cot A + \operatorname{cosec} A.$

২১। $\cos A + \sin A = \sqrt{2}\cos A$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos A - \sin A = \sqrt{2}\sin A$

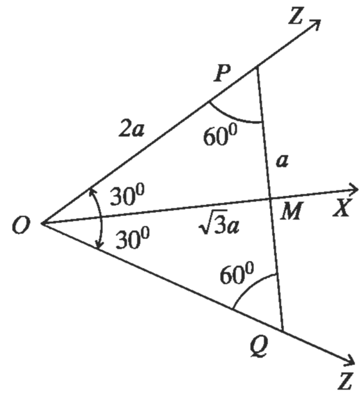
২২। যদি $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$ এর মান নির্ণয় কর।

২৩। $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{4}{3}$ হলে, $\operatorname{cosec} A + \cot A$ এর মান কত ?

২৪। $\cot A = \frac{b}{a}$ হলে, $\frac{a\sin A - b\cos A}{a\sin A + b\cos A}$ এর মান নির্ণয় কর।

৯·৬ 30°, 45° ও 60° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

জ্যামিতিক উপায়ে 30°, 45°ও 60° পরিমাপের কোণ আঁকতে শিখেছি। এ সকল কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রকৃত মান জ্যামিতিক পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যায়।



30° ও 60° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করি, $\angle XOZ = 30^\circ$ এবং OZ বাহুতে P একটি বিন্দু। $PM \perp OX$ আঁকি এবং PM কে Q পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $MQ = PM$ হয়। O, Q যোগ করে Z পর্যন্ত বর্ধিত করি

এখন ΔPOM ও ΔQOM এর মধ্যে $PM = QM$,

OM সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle PMO$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle QMO = 90^\circ$

$\therefore \ \Delta POM \cong \Delta QOM$

অতএব, $\angle QOM = \angle POM = 30^\circ$

এবং $\angle OQM = \angle OPM = 60^\circ$

আবার, $\angle POQ = \angle POM + \angle QOM = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$

$\therefore \ \Delta OPQ$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

যদি $OP = 2a$ হয়, তবে $PM = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}OP = a$ [যেহেতু ΔOPQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ]

সমকোণী ΔOPM হতে পাই,

$$OM = \sqrt{OP^2 - PM^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a.$$

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ বের করি :

$$\sin 30^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \ \cos 30^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{OP}{PM} = \frac{2a}{a} = 2, \ \sec 30^\circ = \frac{OP}{OM} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{OM}{PM} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}.$$

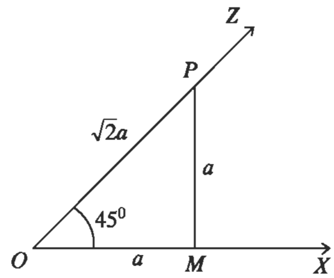
একইভাবে,

$$\sin\ 60^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\ 60^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},\ \tan\ 60^\circ = \frac{OM}{PM} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cosec}\ 60^\circ = \frac{OP}{OM} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}},\ \sec\ 60^\circ = \frac{OP}{PM} = \frac{2a}{a} = 2,\ \cot\ 60^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

.

45° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



মনে করি, $\angle XOZ = 45^\circ$ এবং P, OZ এর উপরস্থ একটি বিন্দু। $PM \perp OX$ আঁকি।

ΔOPM সমকোণী ত্রিভুজে $\angle POM = 45^\circ$

সুতরাং, $\angle OPM = 45^\circ$

অতএব, $PM = OM = a$ (মনে করি)

এখন, $OP^2 = OM^2 + PM^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

বা, $OP = \sqrt{2}\,a$

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞা থেকে আমরা পাই,

$$\sin 45^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\ 45^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \tan\ 45^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{a} = 1$$

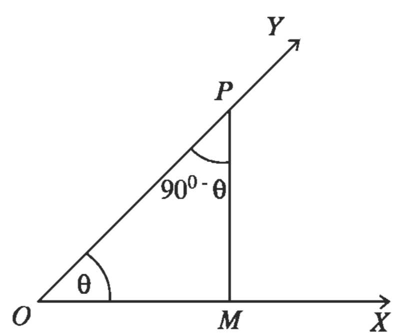
$$\operatorname{cosec}\ 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2},\ \sec\ 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2},\ \cot\ 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = 1$$

৯·৭ পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

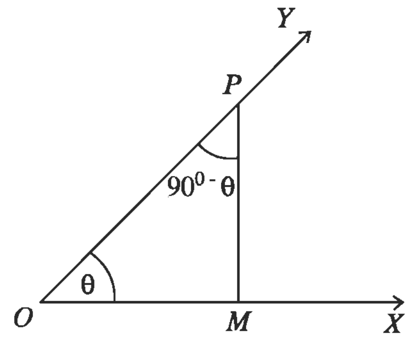
আমরা জানি যে, দুইটি সূক্ষ্মকোণের পরিমাপের সমষ্টি 90° হলে, তাদের একটিকে অপরটির পূরক কোণ বলা হয়।

যেমন, 30° ও 60° এবং 15° ও 75° পরস্পর পূরক কোণ।

সাধারণভাবে, θ কোণ ও $(90^\circ - \theta)$ কোণ পরস্পরের পূরক কোণ।



পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



মনে করি, $\angle XOY = \theta$ এবং P এই কোণের OY বাহুর উপর একটি বিন্দু। $PM \perp OX$ আঁকি।

যেহেতু ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ,

অতএব, POM সমকোণী ত্রিভুজে $\angle PMO = 90^\circ$

এবং $\angle OPM + \angle POM =$ এক সমকোণ $= 90^\circ$

$\therefore \; \angle OPM = 90^\circ - \angle POM = 90^\circ - \theta$

[যেহেতু $\angle POM = \angle XOY = \theta$]

$$\therefore \quad \sin\,(90^\circ - \theta) = \frac{OM}{OP} = \cos\angle POM = \cos\theta$$

$$\cos\,(90^\circ - \theta) = \frac{PM}{OP} = \sin\angle POM = \sin\theta$$

$$\tan\,(90^\circ - \theta) = \frac{OM}{PM} = \cot\angle POM = \cot\,\theta$$

$$\cot\,(90^\circ - \theta) = \frac{PM}{OM} = \tan\angle POM = \tan\,\theta$$

$$\sec\,(90^\circ - \theta) = \frac{OP}{PM} = \operatorname{cosec}\angle POM = \operatorname{cosec}\,\theta$$

$$\operatorname{cosec}\,(90^\circ - \theta) = \frac{OP}{OM} = \sec\angle POM = \sec\,\theta\,.$$

উপরের সূত্রগুলো নিম্নলিখিতভাবে কথায় প্রকাশ করা যায় :

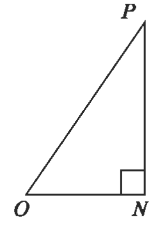
পূরক কোণের sine = কোণের cosine ;

পূরক কোণের cosine = কোণের sine;

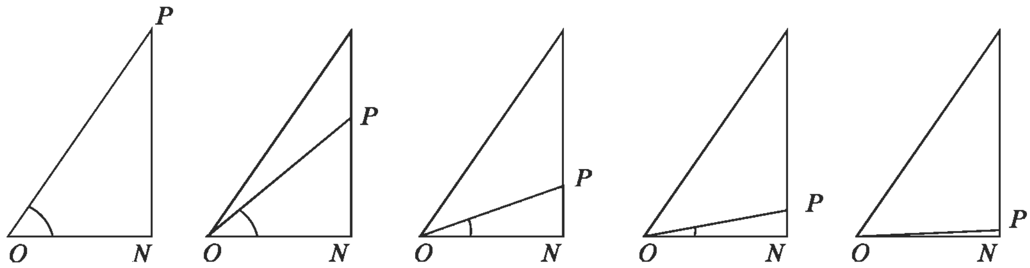
পূরক কোণের tangent = কোণের cotangent, ইত্যাদি।

কাজ : $\sec\,(90^\circ - \theta) = \frac{5}{3}$ হলে, $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

৯·৮ 0° ও 90° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



আমরা সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ θ এর জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নির্ণয় করতে শিখেছি। এবার দেখি, কোণটি ক্রমশ ছোট করা হলে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো কীরূপ হয়। θ কোণটি যতই ছোট হতে থাকে, বিপরীত বাহু PN এর দৈর্ঘ্য ততই ছোট হয়। P বিন্দুটি N বিন্দুর নিকটতর হয় এবং অবশেষে θ কোণটি যখন 0° এর খুব কাছে অবস্থিত হয়, OP প্রায় ON এর সাথে মিলে যায়।



যখন θ কোণটি 0° এর খুব নিকটে আসে PN রেখাংশের দৈর্ঘ্য শূন্যের কোঠায় নেমে আসে এবং এক্ষেত্রে $\sin\theta = \dfrac{PN}{OP}$ এর মান প্রায় শূন্য। একই সময়, θ কোণটি 0° এর খুব কাছে এলে OP এর দৈর্ঘ্য প্রায় ON এর দৈর্ঘ্যের সমান হয় এবং $\cos\theta = \dfrac{ON}{OP}$ এর মান প্রায় 1.

ত্রিকোণমিতিতে আলোচনার সুবিধার্থে 0° কোণের অবতারণা করা হয় এবং প্রমিত অবস্থানে 0° কোণের প্রান্তীয় বাহু ও আদি বাহু একই রশ্মি ধরা হয়। সুতরাং পূর্বের আলোচনার সঙ্গে সামঞ্জস্য রেখে বলা হয় যে, $\cos 0^\circ = 1$, $\sin 0^\circ = 0$.

θ সূক্ষ্মকোণ হলে আমরা দেখেছি

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

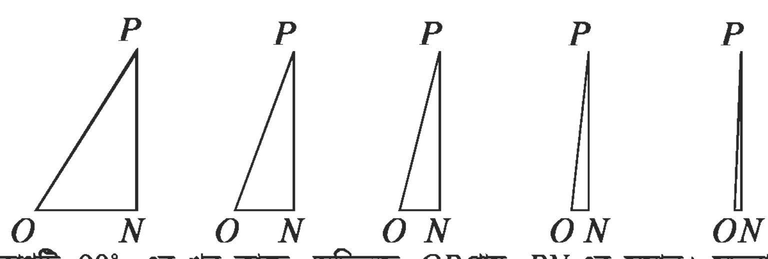
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta},$$

0° কোণের জন্য সম্ভাব্য ক্ষেত্রে এ সম্পর্কগুলো যাতে বজায় থাকে সে দিকে লক্ষ রেখে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

$$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = \frac{1}{1} = 1.$$

0 দ্বারা ভাগ করা যায় না বিধায় $\operatorname{cosec} 0^\circ$ ও $\cot 0^\circ$ সংজ্ঞায়িত করা যায় না।



আবার, যখন θ কোণটি 90° এর খুব কাছে, অতিভুজ OP প্রায় PN এর সমান। সুতরাং, $\sin\theta$ এর মান প্রায় 1। অন্যদিকে, θ কোণটি প্রায় 90° এর সমান হলে ON শূন্যের কাছাকাছি; $\cos\theta$ এর মান প্রায় 0.

সুতরাং, পূর্বে বর্ণিত সূত্রের সঙ্গে সামঞ্জস্য রেখে বলা হয় যে, $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$.

$$\cot 90^\circ = \frac{\cos 90^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\operatorname{cosec} 90^\circ = \frac{1}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

পূর্বের ন্যায় 0 দ্বারা ভাগ করা যায় না বিধায় $\tan 90^\circ$ ও $\sec 90^\circ$ সংজ্ঞায়িত করা যায় না।

দ্রষ্টব্য : ব্যবহারের সুবিধার্থে 0°, 30°, 45°, 60° ও 90° কোণগুলোর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান নিচের ছকে দেখানো হলো :

কোণ / অনুপাত	0°	30°	45°	60°	90°
sine	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosine	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tangent	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত
cotangent	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
secant	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
cosecant	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

লক্ষ করি : নির্ধারিত কয়েকটি কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক মানসমূহ মনে রাখার সহজ উপায়

(*i*) 0, 1, 2, 3 এবং 4 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\sin 0^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 60^\circ$ এবং $\sin 90^\circ$ এর মান পাওয়া যায়।

(*ii*) 4, 3, 2, 1 এবং 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\cos 0^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\cos 60^\circ$ এবং $\cos 90^\circ$ এর মান পাওয়া যায়।

(*iii*) 0, 1, 3 এবং 9 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\tan 0^\circ$, $\tan 30^\circ$, $\tan 45^\circ$ এবং $\tan 60^\circ$ এর মান পাওয়া যায়। (উল্লেখ্য যে, $\tan 90^\circ$ সংজ্ঞায়িত নয়)।

(*iv*) 9, 3, 1 এবং 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\cot 30^\circ$, $\cot 45^\circ$, $\cot 60^\circ$, $\cot 90^\circ$ এর মান পাওয়া যায়। (উল্লেখ্য যে, $\cot 0^\circ$ সংজ্ঞায়িত নয়)।

উদাহরণ ১। মান নির্ণয় কর :

(ক) $\dfrac{1-sin^2 45^\circ}{1+sin^2 45^\circ}+tan^2 45^\circ$

(খ) $cot\, 90^\circ \cdot tan\, 0^\circ \cdot sec\, 30^\circ \cdot cosec\, 60^\circ$

(গ) $sin\, 60^\circ \cdot cos\, 30^\circ + cos\, 60^\circ \cdot sin\, 30^\circ$

(ঘ) $\dfrac{1-\tan^2 60^\circ,}{1+\tan^2 60^\circ}+\sin^2 60^\circ$

সমাধান :

(ক) প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{1-sin^2 45^\circ}{1+sin^2 45^\circ}+tan^2 45^\circ$

$= \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+(1)^2 \quad [\because sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ও $tan 45^\circ = 1]$

$= \dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}}+1 = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{3}{2}}+1 = \dfrac{1}{3}+1 = \dfrac{4}{3}$

(খ) প্রদত্ত রাশি $= cot\, 90^\circ \cdot tan\, 0^\circ \cdot sec\, 30^\circ \cdot cosec\, 60^\circ$

$= 0 \cdot 0 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = 0$

$[\because cot\, 90^\circ = 0,\ tan\, 0^\circ = 0,\ sec\, 30^\circ = \dfrac{2}{\sqrt{3}},\ cosec\, 60^\circ = \dfrac{2}{\sqrt{3}}]$

(গ) প্রদত্ত রাশি $= sin\, 60^\circ \cdot cos\, 30^\circ + cos\, 60^\circ \cdot sin\, 30^\circ$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}$

$[\because \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}]$

$= \dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

(ঘ) প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{1-\tan^2 60^\circ}{1+\tan^2 60^\circ}+\sin^2 60^\circ$

$= \dfrac{1-(\sqrt{3})^2}{1+(\sqrt{3})^2}+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \dfrac{1-3}{1+3}+\dfrac{3}{4} = \dfrac{-2}{4}+\dfrac{3}{4}$

$= \dfrac{-2+3}{4} = \dfrac{1}{4}$

উদাহরণ ২।

(ক) $\sqrt{2}\cos(A-B)=1,\ 2\sin(A+B)=\sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\dfrac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ হলে, A এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $A=45^\circ$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos 2A=\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ ।

(ঘ) সমাধান কর : $2\cos^2\theta+3\sin\theta-3=0$ ।

সমাধান : (ক) $\sqrt{2}cos(A-B)=1$

বা, $cos(A-B)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $cos(A-B)=cos45^\circ$ $[\because cos45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}]$

$\therefore\quad A-B=45^\circ$..................$(i)$

এবং $2sin(A+B)=\sqrt{3}$

বা, $sin(A+B)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $sin(A+B)=sin\,60^\circ$ $[\because sin\,60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$

$\therefore\quad A+B=60^\circ$....................$(ii)$

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$2A=105^\circ$

$\therefore\quad A=\dfrac{105^\circ}{2}=52\dfrac{1}{2}^\circ$

আবার, (ii) হতে (i) বিয়োগ করে পাই,

$2B=15^\circ$

বা, $B=\dfrac{15^\circ}{2}$

$\therefore\quad B=7\dfrac{1}{2}^\circ$

নির্ণেয় $A=52\dfrac{1}{2}^\circ$ ও $B=7\dfrac{1}{2}^\circ$

(খ) $\frac{cosA - sinA}{cosA + sinA} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cos A - \sin A + \cos A + \sin A}{\cos A - \sin A - \cos A - \sin A} = \frac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}$ [যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2cosA}{-2sinA} = \frac{2}{-2\sqrt{3}}$

বা, $\frac{cosA}{sinA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $cotA = \cot 60^\circ$

$\therefore$ $A = 60^\circ$

(গ) দেওয়া আছে, $A = 45^\circ$

প্রমাণ করতে হবে, $cos2A = \frac{1-tan^2 A}{1+tan^2 A}$

বামপক্ষ $= cos2A$

$= cos(2\times 45^\circ) = cos\,90^\circ = 0$

ডানপক্ষ $= \frac{1-tan^2 A}{1+tan^2 A}$

$= \frac{1-tan^2 45^\circ}{1+tan^2 45^\circ} = \frac{1-(1)^2}{1+(1)^2}$

$= \frac{0}{2} = 0$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(ঘ) প্রদত্ত সমীকরণ $2cos^2\theta + 3sin\theta - 3 = 0$

বা, $2(1-\sin^2\theta - 3(1-\sin\theta) = 0$

বা, $2(1+sin\theta)(1-sin\theta) - 3(1-sin\theta) = 0$

বা, $(1-sin\theta)\{2(1+sin\theta) - 3\} = 0$

বা, $(1-sin\theta)\{2sin\theta - 1\} = 0$

$\therefore$ $1 - sin\theta = 0$

$\therefore$ $sin\theta = 1$

বা, $sin\theta = sin\,90^\circ$

$\therefore$ $\theta = 90^\circ$

অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

বা, $2sin\theta = 1$

বা, $sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $sin\theta = sin\,30^\circ$

বা, $\theta = 30^\circ$

$\therefore$ $\theta = 30^\circ$ অথবা $\theta = 90^\circ$.

অনুশীলনী ৯·২

১। $\cos\theta = \frac{1}{2}$ হলে $\cot\theta$ এর মান কোন্‌টি?

ক. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ. 1

গ. $\sqrt{3}$ ঘ. 2

২। (i) $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

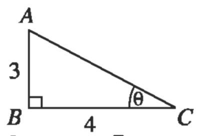
(ii) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

(iii) $\cot^2\theta = 1 - \tan^2\theta$

উপরের তথ্যের আলোকে নিম্নের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. i ও iii

গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii



চিত্র অনুযায়ী ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

৩। $\sin\theta$ এর মান কোন্‌টি ?

ক. $\frac{3}{4}$ খ. $\frac{4}{3}$

গ. $\frac{3}{5}$ ঘ. $\frac{4}{5}$

৪। $\cot\theta$ এর মান কোন্‌টি ?

ক. $\frac{3}{4}$ খ. $\frac{3}{5}$

গ. $\frac{4}{5}$ ঘ. $\frac{4}{3}$

মান নির্ণয় কর (৫–৮)

৫। $\frac{1-\cot^2 60^\circ}{1+\cot^2 60^\circ}$

৬। $\tan 45^\circ \cdot \sin^2 60^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ.$

৭। $\frac{1-\cos^2 60^\circ}{1+\cos^2 60^\circ} + \sec^2 60^\circ$

৮। $\cos 45^\circ \cdot \cot^2 60^\circ \cdot \text{cosec}^2\, 30^\circ$

দেখাও যে, (৯–১৫)

৯। $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ.$

১০। $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \sin 90^\circ$

১১। $\cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ = \cos 30^\circ$

১২। $\sin 3A = \cos 3A.$ যদি $A = 15^\circ$ হয়।

১৩। $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ যদি $A = 45^\circ$ হয়।

১৪। $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ যদি $A = 30^\circ$ হয়।

১৫। $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ যদি $A = 60^\circ$ হয়।

১৬। $2\cos(A+B) = 1 = 2\sin(A-B)$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে দেখাও যে, $A = 45^\circ$, $B = 15^\circ$।

১৭। $\cos(A-B) = 1$, $2\sin(A+B) = \sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

১৮। সমাধান কর : $\dfrac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

১৯। A ও B সূক্ষ্মকোণ এবং $\cot(A+B) = 1$, $\cot(A-B) = \sqrt{3}$ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

২০। দেখাও যে, $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ যদি $A = 30^\circ$ হয়।

২১। সমাধান কর : $\sin\theta + \cos\theta = 1$, যখন $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$

২২। সমাধান কর : $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2 - 5\cos\theta$ যখন θ সূক্ষ্মকোণ।

২৩। সমাধান কর : $2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$, θ সূক্ষ্মকোণ।

২৪। সমাধান কর : $\tan^2\theta - (1+\sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0$.

২৫। মান নির্ণয় কর : $3\cot^2 60^\circ + \frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2 30^\circ + 5\sin^2 45^\circ - 4\cos^2 60^\circ$

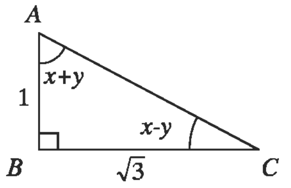
২৬। ΔABC এর $\angle B = 90^0$, $AB = 5$ cm, $BC = 12$ cm.

ক. AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ. $\angle C = \theta$ হলে $\sin\theta + \cos\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta$

২৭।



ক. AC এর পরিমাণ কত?

খ. $\tan A + \tan C$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. x ও y এর মান নির্ণয় কর।

দশম অধ্যায়

দূরত্ব ও উচ্চতা

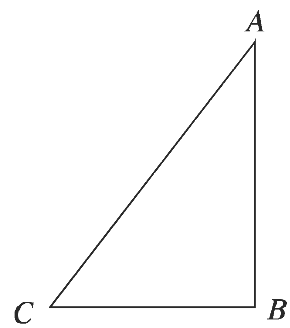
অতি প্রাচীন কাল থেকেই দূরবর্তী কোনো বস্তুর দূরত্ব ও উচ্চতা নির্ণয় করতে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োগ করা হয়। বর্তমান যুগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ব্যবহার বেড়ে যাওয়ায় এর গুরুত্ব অপরিসীম। যে সব পাহাড়, পর্বত, টাওয়ার, গাছের উচ্চতা এবং নদ–নদীর প্রস্থ সহজে মাপা যায় না সে সব ক্ষেত্রে উচ্চতা ও প্রস্থ ত্রিকোণমিতির সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। এক্ষেত্রে সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান জেনে রাখা প্রয়োজন।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- ভূ–রেখা, ঊর্ধ্বরেখা, উলম্বতল, উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতির সাহায্যে দূরত্ব ও উচ্চতা বিষয়ক গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতির সাহায্যে হাতে–কলমে দূরত্ব ও উচ্চতা বিষয়ক বিভিন্ন পরিমাপ করতে পারবে।

ভূ–রেখা, ঊর্ধ্বরেখা এবং উলম্বতল :

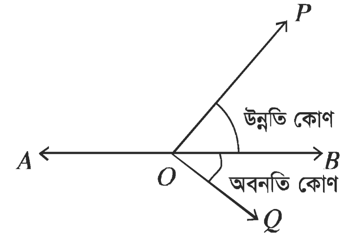
ভূ–রেখা হচ্ছে ভূমি তলে অবস্থিত যেকোনো সরলরেখা। ঊর্ধ্বরেখা হচ্ছে ভূমি তলের উপর লম্ব যেকোনো সরলরেখা। একে উলম্ব রেখাও বলে।



ভূমি তলের উপর লম্বভাবে অবস্থিত পরস্পরচ্ছেদী ভূ–রেখা ও ঊর্ধ্বরেখা একটি তল নির্দিষ্ট করে। এ তলকে উলম্ব তল বলে।

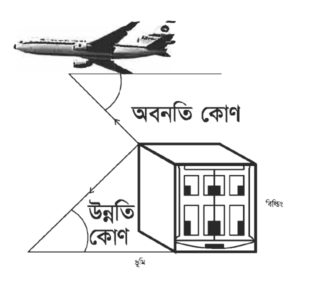
চিত্রে : ভূমি তলের কোনো স্থান C থেকে CB দূরত্বে AB উচ্চতা বিশিষ্ট একটি গাছ খাড়া অবস্থায় দন্ডায়মান। এখানে CB রেখা হচ্ছে ভূ–রেখা, BA রেখা হচ্ছে ঊর্ধ্বরেখা এবং ABC তলটি ভূমির উপর লম্ব যা উলম্ব তল।

উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ :



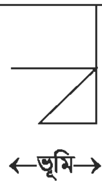
চিত্রটি লক্ষ করি, ভূমির সমান্তরাল AB একটি সরলরেখা। A, O, B, P, Q বিন্দুগুলো একই উলম্ব তলে অবস্থিত। AB সরলরেখার উপরের P বিন্দুটি AB রেখার সাথে $\angle POB$ উৎপন্ন করে। এখানে, O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর উন্নতি কোণ $\angle POB$ ।

সুতরাং, ভূতলের উপরের কোনো বিন্দু ভূমির সমান্তরাল রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে উন্নতি কোণ বলা হয়।

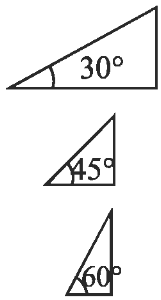


Q বিন্দু ভূ–রেখার সমান্তরাল AB রেখার নিচের দিকে অবস্থিত। এখানে, O বিন্দুর সাপেক্ষে Q বিন্দুর অবনতি কোণ হচ্ছে $\angle QOB$. সুতরাং ভূতলের সমান্তরাল রেখার নিচের কোন বিন্দু ভূ–রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে অবনতি কোণ বলা হয়।

কাজ :
চিত্রটি চিহ্নিত কর এবং ভূ–রেখা উর্ধ্বরেখা, উলম্বতল, উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ নির্দেশ কর।



বিশেষ দ্রষ্টব্য : এ অধ্যায়ে সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে আনুমানিক সঠিক চিত্র আবশ্যক। চিত্র অঙ্কনের সময় নিচের কৌশল অবলম্বন করা দরকার।



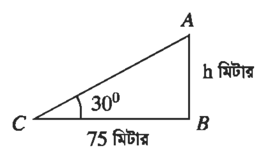
(১) 30° কোণ অঙ্কনের ক্ষেত্রে ভূমি > লম্ব হবে।

(২) 45° কোণ অঙ্কনের ক্ষেত্রে ভূমি = লম্ব হবে।

(৩) 60° কোণ অঙ্কনের ক্ষেত্রে ভূমি < লম্ব হবে।

উদাহরণ ১। একটি টাওয়ারের পাদদেশ থেকে 75 মিটার দূরে ভূতলস্থ কোনো বিন্দুতে টাওয়ারের শীর্ষের উন্নতি 30° হলে, টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, টাওয়ারের উচ্চতা $AB = h$ মিটার টাওয়ারের পাদদেশ থেকে $BC = 75$ মিটার দূরে ভূতলস্থ C বিন্দুতে টাওয়ারের শীর্ষ A বিন্দুর উন্নতি $\angle ACB = 30^\circ$



সমকোণী ΔABC থেকে পাই, $tan\angle ACB = \dfrac{AB}{BC}$

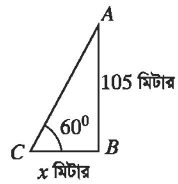
বা, $tan30^\circ = \dfrac{h}{75}$ বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{75}$ $\left[\because tan30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ বা, $\sqrt{3}h = 75$ বা, $h = \dfrac{75}{\sqrt{3}}$

বা, $h = \dfrac{75\sqrt{3}}{3}$ [হর এবং লবকে $\sqrt{3}$ দ্বারা গুণ করে] বা, $h = 25\sqrt{3}$

$\therefore$ $h = 43.301$ (প্রায়)।

$\therefore$ টাওয়ারের উচ্চতা 43.30 মিটার (প্রায়)।

উদাহরণ ২। একটি গাছের উচ্চতা 105 মিটার। গাছটির শীর্ষের উন্নতি ভূমির কোনো বিন্দুতে উন্নতি কোণ 60° হলে, গাছটির গোড়া থেকে ভূতলস্থ বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় কর।



সমাধান : মনে করি, গাছের গোড়া থেকে ভূতলস্থ বিন্দুটির দূরত্ব $BC = x$ মিটার, গাছের উচ্চতা $AB = 105$ মিটার এবং C বিন্দুতে গাছটির শীর্ষ বিন্দুর উন্নতি $\angle ACB = 60^\circ$

ΔABC থেকে পাই,

$tan\angle ACB = \dfrac{AB}{BC}$ বা, $tan 60^0 = \dfrac{105}{x}$

বা, $\sqrt{3} = \dfrac{105}{x}$ $\left[\because tan 60^0 = \sqrt{3}\right]$ বা, $\sqrt{3}x = 105$ বা, $x = \dfrac{105}{\sqrt{3}}$ বা, $x = \dfrac{105\sqrt{3}}{3}$ বা, $x = 35\sqrt{3}$

$\therefore$ $x = 60.622$ মিটার (প্রায়)

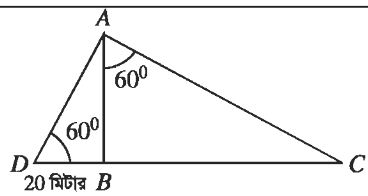
$\therefore$ গাছটির গোড়া থেকে ভূতলস্থ বিন্দুটি দূরত্ব 60.62 মিটার (প্রায়)।

কাজ :

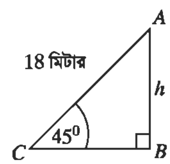
চিত্রে AB একটি গাছ। চিত্রে প্রদত্ত তথ্য থেকে –

১। গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

২। গাছটির পাদদেশ থেকে ভূতলস্থ C বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।



উদাহরণ ৩। 18 মিটার লম্বা একটি মই একটি দেওয়ালের ছাদ বরাবর ঠেস দিয়ে ভূমির সঙ্গে 45° কোণ উৎপন্ন করে। দেওয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।



সমাধান : মনে করি, দেওয়ালটির উচ্চতা $AB = h$ মিটার, মইটির দৈর্ঘ্য $AC = 18$ মিটার এবং ভূমির সঙ্গে $\angle ACB = 45^\circ$ উৎপন্ন করে।

ΔABC থেকে পাই, $\sin\angle ACB = \dfrac{AB}{AC}$

বা, $\sin 45^\circ = \dfrac{h}{18}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{h}{18}$ $\left[\because \sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$

বা, $\sqrt{2}h = 18$ বা, $h = \dfrac{18}{\sqrt{2}}$

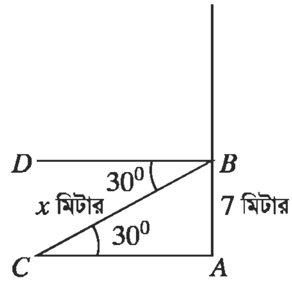
বা, $h = \dfrac{18\sqrt{2}}{2}$ [হর এবং লবকে $\sqrt{2}$ দ্বারা গুণ করে] বা, $h = 9\sqrt{2}$

$\therefore$ $h = 12.728$ (প্রায়)

সুতরাং দেওয়ালটির উচ্চতা 12.73 মিটার (প্রায়)।

উদাহরণ ৪। ঝড়ে একটি গাছ হেলে পড়লো। গাছের গোড়া থেকে 7 মিটার উচ্চতায় একটি খুঁটি ঠেস দিয়ে গাছাটিকে সোজা করা হলো। মাটিতে খুঁটিটির স্পর্শ বিন্দুর অবনতি কোণ 30° হলে, খুঁটিটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, গাছের গোড়া থেকে $AB = 7$ মিটার উচ্চতায় খুঁটিটি ঠেস দিয়ে আছে এবং অবনতি $\angle DBC = 30^\circ$ ।



$\therefore \angle ACB = \angle DBC = 30^\circ$ [একান্তর কোণ বলে]

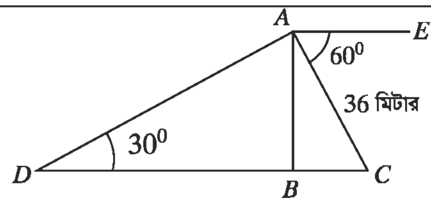
ΔABC থেকে পাই,

$Sin\angle ACB = \frac{AB}{BC}$ বা, $Sin30^\circ = \frac{7}{BC}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{7}{BC}\left[\because Sin30^\circ = \frac{1}{2}\right]$

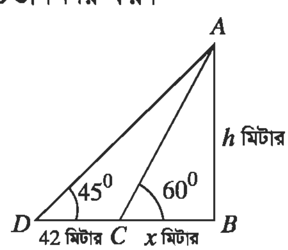
$\therefore BC = 14$

$\therefore$ খুঁটিটির দৈর্ঘ্য 14 মিটার।

> **কাজ :** চিত্রে অবনতি $\angle CAE = 60^\circ$, উন্নতি $\angle ADB = 30^\circ$ $AC = 36$ মিটার, $AB \perp DC$ এবং D, B, C একই সরলরেখায় অবস্থিত। AB, AD এবং CD বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
>
> 
>

উদাহরণ ৫। ভূতলস্থ কোনো স্থানে একটি দালানের ছাদের একটি বিন্দুর উন্নতি কোণ 60°। ঐ স্থান থেকে 42 মিটার পিছিয়ে গেলে দালানের ঐ বিন্দুর উন্নতি কোণ 45° হয়। দালানের উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, দালানের উচ্চতা $AB = h$ মিটার, শীর্ষের উন্নতি $\angle ACB = 60^\circ$ এবং C স্থান থেকে $CD = 42$ মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি $\angle ADB = 45^\circ$ হয়।



ধরি, $BC = x$ মিটার।

$\therefore \; BD = BC + CD = (x + 42)$ মিটার।

ΔABC থেকে পাই,

$tan60^0 = \frac{AB}{BC}$ বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ $\quad [\because tan60^0 = \sqrt{3}]$

$\therefore \; x = \frac{h}{\sqrt{3}}$............$(i)$

আবার, ΔABD থেকে পাই, $\tan 45^\circ = \frac{AB}{BD}$

বা, $1 = \frac{h}{x + 42}$ $\quad [\because tan45^0 = 1]$ বা, $h = x + 42$

বা, $h = \frac{h}{\sqrt{3}} + 42$; [(i) নং সমীকরণের সাহায্যে।]

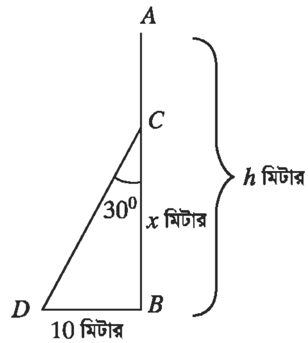
বা, $\sqrt{3}h = h + 42\sqrt{3}$ বা, $\sqrt{3}h - h = 42\sqrt{3}$ বা, $(\sqrt{3}-1)h = 42\sqrt{3}$ বা, $h = \frac{42\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

$\therefore h = 99.373$ মিটার (প্রায়)

দালানটির উচ্চতা 99.373 মিটার (প্রায়)।

উদাহরণ ৬। একটি খুঁটি এমন ভাবে ভেঙে গেল যে, তার অবিচ্ছিন্ন ভাঙা অংশ দণ্ডায়মান অংশের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে খুঁটির গোড়া থেকে 10 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। সম্পূর্ণ খুঁটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সম্পূর্ণ খুঁটির দৈর্ঘ্য $AB = h$ মিটার। খুটিটি $BC = x$ মিটার উচ্চতায় ভেঙে গিয়ে বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভাঙা অংশ দণ্ডায়মান অংশের সাথে $\angle BCD = 30^\circ$ উৎপন্ন করে গোড়া থেকে $BD = 10$ মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে।



এখানে, $CD = AC = AB - BC = (h - x)$ মিটার

ΔBCD থেকে পাই,

$tan30^\circ = \frac{BD}{BC}$ বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{x}$ $\therefore x = 10\sqrt{3}$

আবার, $sin30^\circ = \frac{BD}{CD}$ বা, $\frac{1}{2} = \frac{10}{h-x}$

বা, $h - x = 20$ বা, $h = 20 + x$ বা, $h = 20 + 10\sqrt{3}$; [x-এর মান বসিয়ে]

$\therefore h = 37.321$ (প্রায়) $\therefore$ খুঁটির দৈর্ঘ্য 37.32 মিটার (প্রায়)।

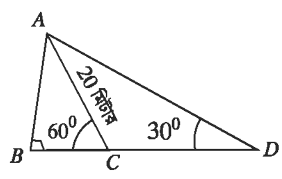
কাজ :
দুইটি মাইল পোস্টের মধ্যবর্তী কোনো স্থানের উপরে একটি বেলুন উড়ছে। বেলুনের স্থানে ঐ মাইল পোস্ট দুইটির অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 60° হলে, বেলুনটির উচ্চতা মিটারে নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ১০

১। ক. $\angle$CAD এর পরিমাণ নির্ণয় কর।

খ. AB ও BC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ. A ও D এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

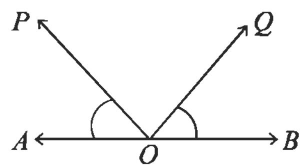


২। দুইটি কিলোমিটার পোস্ট A ও B এর মধ্যবর্তী কোনো স্থানের উপর O বিন্দুতে একটি হেলিকপ্টার হতে ঐ কিলোমিটার পোস্টদ্বয়ের অবনতি কোণ যথাক্রমে 60^0 এবং 30^0

ক. সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন কর।

খ. হেলিকপ্টারটি মাটি থেকে কত উঁচুতে অবস্থিত?

গ. A বিন্দু থেকে হেলিকপ্টারটির সরাসরি দূরত্ব নির্ণয় কর।



৩। পাশের চিত্রে O বিন্দুতে P বিন্দুর উন্নতি কোণ কোনটি?

ক. $\angle QOB$ খ. $\angle POA$ গ. $\angle QOA$ ঘ. $\angle POB$

৪। i ভূ-রেখা হচ্ছে ভূমি তলে অবস্থিত যে কোনো সরলরেখা।

ii ঊর্ধ্বরেখা হচ্ছে ভূমি তলের ওপর লম্ব যে কোনো সরলরেখা।

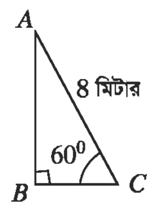
iii ভূমি তলের উপর লম্বভাবে অবস্থিত পরস্পরচ্ছেদী ভূ-রেখা ও ঊর্ধ্বরেখা একটি তল নির্দিষ্ট করে। এ তলকে উলম্ব তল বলে।

ওপরের বাক্যগুলোর মধ্যে কোন্‌টি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii

গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

পাশের চিত্র অনুযায়ী ৫–৬ প্রশ্ন দুইটির উত্তর দাও।



৫। BC এর দৈর্ঘ্য হবে –

ক. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ মিটার খ. 4 মিটার

গ. $4\sqrt{2}$ মিটার ঘ. $4\sqrt{3}$ মিটার

৬। AB এর দৈর্ঘ্য হবে–

ক. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ মিটার খ. 4 মিটার

গ. $4\sqrt{2}$ মিটার ঘ. $4\sqrt{3}$ মিটার

৭। একটি মিনারের পাদদেশ থেকে কিছু দূরে একটি স্থানে মিনারটির শীর্ষের উন্নতি কোণ 30° এবং মিনারটির উচ্চতা 26 মিটার হলে, মিনার থেকে ঐ স্থানটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

৮। একটি গাছের পাদদেশ থেকে 20 মিটার দূরে ভূতলের কোনো বিন্দুতে গাছের চূড়ার উন্নতি কোণ 60° হলে, গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

৯। 18 মিটার দৈর্ঘ্যের একটি মই ভূমির সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে দেওয়ালের ছাদ স্পর্শ করে। দেওয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

১০। একটি ঘরের ছাদের কোনো বিন্দুতে ঐ বিন্দু থেকে 20 মিটার দূরের ভূতলস্থ একটি বিন্দুর অবনতি কোণ 30° হলে, ঘরটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

১১। ভূতলে কোনো স্থানে একটি স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি কোণ 60°। ঐ স্থান থেকে 25 মিটার পিছিয়ে গেলে স্তম্ভটির উন্নতি কোণ 30° হয়। স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

১২। কোনো স্থান থেকে একটি মিনারের দিকে 60 মিটার এগিয়ে আসলে মিনারের শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ 45° থেকে 60° হয়। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

১৩। একটি নদীর তীর কোনো এক স্থানে দাড়িয়ে একজন লোক দেখল যে, ঠিক সোজাসোজি অপর তীরে অবস্থিত একটি টাওয়ারের উন্নতি কোণ 60°। ঐ স্থান থেকে 96 মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি কোণ 30° হয়। টাওয়ারের উচ্চতা এবং নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

১৪। 64 মিটার লম্বা একটি খুঁটি ভেঙে গিয়ে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমির সাথে 60° উৎপন্ন করে। খুঁটিটির ভাঙা অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১৫। একটি গাছ ঝড়ে এমনভাবে ভেঙে গেল যে অবিচ্ছিন্ন ভাঙা অংশ দণ্ডায়মান অংশের সাথে 30° কোণ করে গাছের গোড়া থেকে 12 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। সম্পূর্ণ গাছটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১৬। একটি নদীর এক তীরে কোনো স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখলো যে, ঠিক সোজাসোজি অপর তীরে অবস্থিত 150 মিটার লম্বা একটি গাছের শীর্ষের উন্নতি কোণ 30°। লোকটি একটি নৌকাযোগে গাছটিকে লক্ষ্য করে যাত্রা শুরু করলো। কিন্তু পানির স্রোতের কারণে লোকটি গাছ থেকে 10 মিটার দূরে তীরে পৌছল।

(ক) উপরোক্ত বর্ণনাটি চিত্রের মাধ্যমে দেখাও।

(খ) নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

(গ) লোকটির যাত্রা স্থান থেকে অবতরণের স্থানের দূরত্ব নির্ণয় কর।

একাদশ অধ্যায়

বীজগণিতীয় অনুপাত ও সমানুপাত

(Algebraic Ratio and Proportion)

অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা থাকা আমাদের জন্য খুবই গুরুত্বপূর্ণ। সপ্তম শ্রেণিতে পাটিগণিতীয় অনুপাত ও সমানুপাত বিশদভাবে আলোচনা করা হয়েছে। এ অধ্যায়ে আমরা বীজগণিতীয় অনুপাত ও সমানুপাত সম্পর্কে আলোচনা করবো। আমরা প্রতিনিয়তই নির্মাণ সামগ্রী ও বিভিন্ন প্রকার খাদ্য সামগ্রী তৈরীতে, ভোগ্যপণ্য উৎপাদনে, জমিতে সার প্রয়োগে, কোনোও কিছুর আকার–আয়তন দৃষ্টিনন্দন করতে এবং দৈনন্দিন কার্যক্রমের আরও অনেক ক্ষেত্রে অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা প্রয়োগ করে থাকি। ইহা ব্যবহার করে দৈনন্দিন জীবনে অনেক সমস্যার সমাধান করা যায়।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- বীজগণিতীয় অনুপাত ও সমানুপাত ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সমানুপাত সংক্রান্ত বিভিন্ন রূপান্তর বিধি প্রয়োগ করতে পারবে।
- ধারাবাহিক অনুপাত বর্ণনা করতে পারবে।
- বাস্তব সমস্যা সমাধানে অনুপাত, সমানুপাত ও ধারাবাহিক অনুপাত ব্যবহার করতে পারবে।

১১·১ অনুপাত

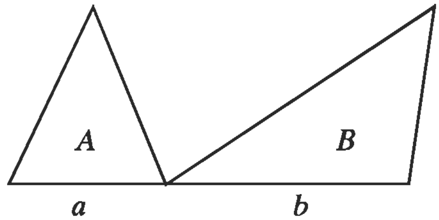
একই এককের সমজাতীয় দুইটি রাশির পরিমাণের একটি অপরটির কত গুণ বা কত অংশ তা একটি ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এই ভগ্নাংশটিকে রাশি দুইটির অনুপাত বলে।

দুইটি রাশি p ও q এর অনুপাতকে $p : q = \frac{p}{q}$ লিখা হয়। p ও q রাশি দুইটি সমজাতীয় ও একই এককে প্রকাশিত হতে হবে। অনুপাতে p কে পূর্ব রাশি এবং q কে উত্তর রাশি বলা হয়।

অনেক সময় আনুমানিক পরিমাপ করতেও আমরা অনুপাত ব্যবহার করি। যেমন, সকাল 8 টায় রাস্তায় যে সংখ্যক গাড়ী থাকে, 10 টায় তার দ্বিগুণ গাড়ী থাকে। এ ক্ষেত্রে অনুপাত নির্ণয়ে গাড়ীর প্রকৃত সংখ্যা জানার প্রয়োজন হয় না। আবার অনেক সময় আমরা বলে থাকি, তোমার ঘরের আয়তন আমার ঘরের আয়তনের তিনগুণ হবে। এখানেও ঘরের সঠিক আয়তন জানার প্রয়োজন হয় না। বাস্তব জীবনে এরকম অনেক ক্ষেত্রে আমরা অনুপাতের ধারণা ব্যবহার করে থাকি।

১১·২ সমানুপাত

যদি চারটি রাশি এরূপ হয় যে, প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থ রাশির অনুপাতের সমান হয়, তবে ঐ চারটি রাশি নিয়ে একটি সমানুপাত উৎপন্ন হয়। a, b, c, d এরূপ চারটি রাশি হলে, আমরা লিখি $a : b = c : d$ । সমানুপাতের চারটি রাশিই একজাতীয় হওয়ার প্রয়োজন হয় না। প্রত্যেক অনুপাতের রাশি দুইটি এক জাতীয় হলেই চলে।



উপরের চিত্রে, দুইটি ত্রিভুজের ভূমি যথাক্রমে a ও b এবং তাদের প্রত্যেকের উচ্চতা h একক। ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল A ও B বর্গএকক হলে আমরা লিখতে পারি

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}bh}=\frac{a}{b} \quad \text{বা, } A:B=a:b$$

অর্থাৎ, ক্ষেত্রফলয়ের অনুপাত ভূমিদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

ক্রমিক সমানুপাতী

a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী বলতে বোঝায় $a:b=b:c.$

a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হবে যদি এবং কেবল যদি $b^2=ac$ হয়। ক্রমিক সমানুপাতের ক্ষেত্রে সবগুলো রাশি এক জাতীয় হতে হবে। এক্ষেত্রে c কে a ও b এর তৃতীয় সমানুপাতী এবং b কে a ও c এর মধ্যসমানুপাতী বলা হয়।

উদাহরণ ১। A ও B নির্দিষ্ট পথ অতিক্রম করে যথাক্রমে t_1 এবং t_2 মিনিটে। A ও B এর গড় গতিবেগের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, A ও B এর গড় গতিবেগ প্রতি মিনিটে যথাক্রমে v_1 মিটার ও v_2 মিটার। তাহলে,

t_1 মিনিটে A অতিক্রম করে v_1t_1 মিটার এবং t_2 মিনিটে B অতিক্রম করে v_2t_2 মিটার ।

প্রশ্নানুসারে, $v_1t_1 = v_2t_2$, $\therefore \frac{v_1}{v_2}=\frac{t_2}{t_1}$

এখানে গতিবেগের অনুপাত সময়ের ব্যস্ত অনুপাতের সমান।

> **কাজ :** ১। 3.5 : 5.6 কে $1:a$ এবং $b:1$ আকারে প্রকাশ কর।
> ২। $x:y=5:6$ হলে $3x:5y=$ কত ?

১১·৩ অনুপাতের রূপান্তর

এখানে অনুপাতের রাশিগুলো ধনাত্মক সংখ্যা।

(১) $a:b=c:d$ হলে, $b:a=d:c$ [ব্যস্তকরণ (*Invertendo*)]

প্রমাণ : দেওয়া আছে,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$\therefore ad=bc$ [উভয়পক্ষকে bd দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{ad}{ac}=\frac{bc}{ac}$ [উভয় পক্ষকে ac দ্বারা ভাগ করে যেখানে a, c এর কোনোটিই শূন্য নয়]

বা, $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$

অর্থাৎ, $b:a=d:c$

(২) $a:b=c:d$ হলে, $a:c=b:d$ [একান্তরকরণ (*alternendo*)]

প্রমাণ : দেওয়া আছে,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$\therefore ad=bc$ [উভয়পক্ষকে bd দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{ad}{cd}=\frac{bc}{cd}$ [উভয় পক্ষকে cd দ্বারা ভাগ করে যেখানে c, d এর কোনোটিই শূন্য নয়]

বা, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

অর্থাৎ, $a:c=b:d$

(৩) $a:b=c:d$ হলে, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ [যোজন (*componendo*)]

প্রমাণ : দেওয়া আছে,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\therefore \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$ [উভয়পক্ষে 1 যোগ করে]

অর্থাৎ, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

(৪) $a:b=c:d$ হলে, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ [বিয়োজন (*dividendo*)]

প্রমাণ : দেওয়া আছে,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\therefore \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$ [উভয়পক্ষ থেকে 1 বিয়োগ করে]

অর্থাৎ, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

(৫) $a:b=c:d$ হলে, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ [যোজন–বিয়োজন (*componendo – dividendo*)]

প্রমাণ : $a:b=c:d$

যোজন করে পাই,

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\text{.............}(i)$$

আবার বিয়োজন করে পাই,

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

বা, $\frac{b}{a-b}=\frac{d}{c-d}$ [ব্যস্তকরণ করে] ....(ii)

সুতরাং, $\frac{a+b}{b}\times\frac{b}{a-b}=\frac{c+d}{d}\times\frac{d}{c-d}$ [(i) ও (ii) গুণ করে]

অর্থাৎ, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$. [এখানে $a\neq b$ এবং $c\neq d$]

(৬) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ হলে, প্রত্যেকটি অনুপাত $=\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$.

প্রমাণ : মনে করি, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=k.$

$$\therefore a=bk,\quad c=dk,\quad e=fk,\quad g=hk$$

$$\therefore \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=\frac{bk+dk+fk+hk}{b+d+f+h}=\frac{k(b+d+f+h)}{b+d+f+h}=k.$$

কিন্তু k প্রদত্ত সমানুপাতের প্রত্যেকটি অনুপাতের সমান।

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}.$$

কাজ : ১। মাতা ও কন্যার বর্তমান বয়সের সমষ্টি s বছর। তাদের বয়সের অনুপাত t বছর পূর্বে ছিল $r:p$। x বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে ?

২। একটি ল্যাম্পপোস্ট থেকে p মিটার দূরে দাঁড়ানো r মিটার উচ্চতা বিশিষ্ট এক ব্যক্তির ছায়ার দৈর্ঘ্য s মিটার। ল্যাম্পপোস্টের উচ্চতা p, r ও s এর মাধ্যমে নির্ণয় কর।

উদাহরণ ২। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের অনুপাত $7:2$ এবং 5 বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত $8:3$ হবে। তাদের বর্তমান বয়স কত ?

সমাধান : মনে করি, পিতার বর্তমান বয়স a বছর এবং পুত্রের বর্তমান বয়স b বছর।

প্রশ্নের প্রথম ও দ্বিতীয় শর্তানুসারে যথাক্রমে পাই,

$$\frac{a}{b}=\frac{7}{2}\text{..........}(i)$$

$$\frac{a+5}{b+5}=\frac{8}{3}\text{..........}(ii)$$

সমীকরণ (i) থেকে পাই,

$a = \dfrac{7b}{2}$ ....(iii)

সমীকরণ (ii) থেকে পাই,

$3(a+5) = 8(b+5)$

বা, $3a + 15 = 8b + 40$

বা, $3a - 8b = 40 - 15$

বা, $3 \times \dfrac{7b}{2} - 8b = 25$ [(iii) ব্যবহার করে]

বা, $\dfrac{21b - 16b}{2} = 25$

বা, $5b = 50$

$\therefore\ b = 10$

সমীকরণ (iii) এ $b = 10$ বসিয়ে পাই, $a = 35$

$\therefore$ পিতার বর্তমান বয়স 35 বছর এবং পুত্রের বর্তমান বয়স 10 বছর।

উদাহরণ ৩। যদি $a : b = b : c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\left(\dfrac{a+b}{b+c}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $a : b = b : c$

$\therefore\ b^2 = ac$

এখন, $\left(\dfrac{a+b}{b+c}\right)^2 = \dfrac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$

$= \dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{b^2 + 2bc + c^2}$

$= \dfrac{a^2 + 2ab + ac}{ac + 2bc + c^2}$

$= \dfrac{a(a+2b+c)}{c(a+2b+c)} = \dfrac{a}{c}$

আবার $\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \dfrac{a^2+ac}{ac+c^2}$

$= \dfrac{a(a+c)}{c(a+c)}$

$= \dfrac{a}{c}$

$\therefore\ \left(\dfrac{a+b}{b+c}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$

উদাহরণ ৪। $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হলে, দেখাও যে, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{ac+bd}{ac-bd}$.

সমাধান : মনে করি, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$; $\therefore$ $a=bk$ এবং $c=dk$

এখন, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{(bk)^2+b^2}{(bk)^2-b^2}=\frac{b^2(k^2+1)}{b^2(k^2-1)}=\frac{k^2+1}{k^2-1}$

আবার, $\frac{ac+bd}{ac-bd}=\frac{bk\cdot dk+bd}{bk\cdot dk-bd}=\frac{bd(k^2+1)}{bd(k^2-1)}=\frac{k^2+1}{k^2-1}$

$\therefore$ $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{ac+bd}{ac-bd}$.

উদাহরণ ৫। সমাধান কর : $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1,\quad 0<b<2a<2b.$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1$

$\therefore$ $\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=\frac{1+ax}{1-ax}$

বা, $\frac{1+bx}{1-bx}=\frac{(1+ax)^2}{(1-ax)^2}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{1+bx}{1-bx}=\frac{1+2ax+a^2x^2}{1-2ax+a^2x^2}$

বা, $\frac{1+bx+1-bx}{1+bx-1+bx}=\frac{1+2ax+a^2x^2+1-2ax+a^2x^2}{1+2ax+a^2x^2-1+2ax-a^2x^2}$ [যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2bx}=\frac{2(1+a^2x^2)}{4ax}$

বা, $\frac{1}{bx}=\frac{1+a^2x^2}{2ax}$

বা, $2ax=bx(1+a^2x^2)$

বা, $x\{2a-b(1+a^2x^2)\}=0$

$\therefore$ হয় $x=0$ অথবা $2a-b(1+a^2x^2)=0$

বা, $b(1+a^2x^2) = 2a$

বা, $1+a^2x^2 = \dfrac{2a}{b}$

বা, $a^2x^2 = \dfrac{2a}{b} - 1$

বা, $x^2 = \dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{2a}{b} - 1\right)$

$\therefore\ x = \pm\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{2a}{b} - 1}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 0$, $x = \pm\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{2a}{b} - 1}$.

উদাহরণ ৬। $\dfrac{6}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ হলে দেখাও যে, $\dfrac{x+3a}{x-3a} + \dfrac{x+3b}{x-3b} = 2,\ a \neq b.$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\dfrac{6}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

$\therefore\ 6ab = (a+b)x$ [উভয় পক্ষকে abx দ্বারা গুণ করে]

অর্থাৎ, $x = \dfrac{6ab}{(a+b)}$

বা, $\dfrac{x}{3a} = \dfrac{2b}{a+b}$

$\therefore\ \dfrac{x+3a}{x-3a} = \dfrac{2b+a+b}{2b-a-b}$ [যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{x+3a}{x-3a} = \dfrac{a+3b}{b-a}$

আবার, $\dfrac{x}{3b} = \dfrac{2a}{a+b}$

বা, $\dfrac{x+3b}{x-3b} = \dfrac{2a+a+b}{2a-a-b}$ [যোজন–বিয়োজন করে]

$\therefore\ \dfrac{x+3b}{x-3b} = \dfrac{3a+b}{a-b}$

এখন, $\dfrac{x+3a}{x-3a} + \dfrac{x+3b}{x-3b} = \dfrac{a+3b}{b-a} + \dfrac{3a+b}{a-b}$

$= \dfrac{a+3b}{b-a} - \dfrac{3a+b}{b-a} = \dfrac{a+3b-3a-b}{b-a} = \dfrac{2(b-a)}{b-a} = 2$.

$\therefore\ \dfrac{x+3a}{x-3a} + \dfrac{x+3b}{x-3b} = 2.$

উদাহরণ ৭। $\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=p$ হলে, প্রমাণ কর যে, $p^2-\dfrac{2p}{x}+1=0.$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=p$

$\therefore \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\dfrac{p+1}{p-1}$ [যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}}=\dfrac{p+1}{p-1}$

বা, $\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}=\dfrac{p+1}{p-1}$

বা, $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{(p+1)^2}{(p-1)^2}=\dfrac{p^2+2p+1}{p^2-2p+1}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\dfrac{1+x+1-x}{1+x-1+x}=\dfrac{p^2+2p+1+p^2-2p+1}{p^2+2p+1-p^2+2p-1}$ [যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{1}{x}=\dfrac{p^2+1}{2p}$

বা, $p^2+1=\dfrac{2p}{x}$

$\therefore\ p^2-\dfrac{2p}{x}+1=0.$

উদাহরণ ৮। $\dfrac{a^3+b^3}{a-b+c}=a(a+b)$ হলে, প্রমাণ কর যে, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\dfrac{a^3+b^3}{a-b+c}=a(a+b)$

বা, $\dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a-b+c}=a(a+b)$

বা, $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b+c}=a$ [উভয়পক্ষকে $(a+b)$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $a^2-ab+b^2=a^2-ab+ac$

$\therefore\ b^2=ac$

$\therefore\ a, b, c$ ক্রমিক সমানুপাতী।

উদাহরণ ৯। যদি $\dfrac{a+b}{b+c}=\dfrac{c+d}{d+a}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $c=a$, অথবা $a+b+c+d=0$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $\dfrac{a+b}{b+c}=\dfrac{c+d}{d+a}$

বা, $\frac{a+b}{b+c}-1=\frac{c+d}{d+a}-1$ [উভয়পক্ষ থেকে 1 বিয়োগ করে]

বা, $\frac{a+b-b-c}{b+c}=\frac{c+d-d-a}{d+a}$

বা, $\frac{a-c}{b+c}=\frac{c-a}{d+a}$

বা, $\frac{a-c}{b+c}+\frac{a-c}{d+a}=0$

বা, $(a-c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right)=0$

বা, $(a-c)\frac{(d+a+b+c)}{(b+c)(d+a)}=0$

বা, $(a-c)(d+a+b+c)=0$

$\therefore$ হয় $a-c=0$, অর্থাৎ $a=c$

অথবা, $a+b+c+d=0.$

উদাহরণ ১০। যদি $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}$ এবং x, y, z পরস্পর সমান না হয়, তবে প্রমাণ কর যে, প্রতিটি অনুপাতের মান -1 অথবা $\frac{1}{2}$ এর সমান হবে।

সমাধান : মনে করি,

$$\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}=k$$

$$\therefore x=k(y+z)................(i)$$

$$y=k(z+x)...................(ii)$$

$$z=k(x+y)...................(iii)$$

সমীকরণ (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$x-y=k(y-x)$ বা, $k(y-x)=-(y-x)$

$\therefore\ k=-1$

আবার, সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$$x+y+z=k(y+z+z+x+x+y)=2k(x+y+z)$$

$$\therefore k=\frac{1}{2}\frac{(x+y+z)}{(x+y+z)}=\frac{1}{2}$$

$\therefore$ প্রতিটি অনুপাতের মান -1 অথবা $\frac{1}{2}$.

উদাহরণ ১১। যদি $ax = by = cz$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}=\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}$.

সমাধান : মনে করি,

$$ax = by = cz = k$$

$$\therefore\ x=\frac{k}{a},\ \ y=\frac{k}{b},\ \ z=\frac{k}{c}$$

এখন, $\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}=\frac{k^2}{a^2}\times\frac{bc}{k^2}+\frac{k^2}{b^2}\times\frac{ca}{k^2}+\frac{k^2}{c^2}\times\frac{ab}{k^2}=\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}$

অর্থাৎ, $\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}=\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}$.

অনুশীলনী ১১·১

১। দুইটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a মিটার এবং b মিটার হলে, তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত ?

২। একটি বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হলে, তাদের পরিসীমার অনুপাত নির্ণয় কর।

৩। দুইটি সংখ্যার অনুপাত $3:4$ এবং তাদের ল.সা.গু. 180 ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

৪। একদিন তোমাদের ক্লাসে দেখা গেল অনুপস্থিত ও উপস্থিত ছাত্র সংখ্যার অনুপাত $1:4$, অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যাকে মোট ছাত্র সংখ্যার শতকরায় প্রকাশ কর।

৫। একটি দ্রব্য ক্রয় করে 28% ক্ষতিতে বিক্রয় করা হল। বিক্রয়মূল্য ও ক্রয়মূল্যের অনুপাত নির্ণয় কর।

৬। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি 70 বছর। তাদের বয়সের অনুপাত 7 বছর পূর্বে ছিল $5:2$। 5 বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে ?

৭। যদি $a:b=b:c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

(i) $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$ (ii) $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$

(iii) $\frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3}=1$ (iv) $a-2b+c=\frac{(a-b)^2}{a}=\frac{(b-c)^2}{c}$

৮। সমাধান কর : (i) $\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=b$

(iii) $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b}{x},\ \ 2a>b>0$ এবং $x\neq 0.$

(iv) $\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-6}}=5$ (v) $\frac{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b}}{\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax-b}}=c$

(vi) $81\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3=\frac{1+x}{1-x}$

৯। $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হলে, দেখাও যে, (i) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$ (ii) $\frac{ac+bd}{ac-bd}=\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$

১০। $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ হলে, দেখাও যে,

(i) $\frac{a^3+b^3}{b^3+c^3}=\frac{b^3+c^3}{c^3+d^3}$

(ii) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

১১। $x=\frac{4ab}{a+b}$ হলে, দেখাও যে, $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=2, \quad a\neq b.$

১২। $x=\frac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^3-3mx^2+3x-m=0$

১৩। $x=\frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$ হলে, দেখাও যে, $3bx^2-4ax+3b=0.$

১৪। $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$ হলে, প্রমাণ কর যে, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী।

১৫। $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{y+z-x}=\frac{b}{z+x-y}=\frac{c}{x+y-z}.$

১৬। $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$

১৭। $\frac{a+b-c}{a+b}=\frac{b+c-a}{b+c}=\frac{c+a-b}{c+a}$ এবং $a+b+c\neq 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a=b=c.$

১৮। $\frac{x}{xa+yb+zc}=\frac{y}{ya+zb+xc}=\frac{z}{za+xb+yc}$ এবং $x+y+z\neq 0$ হলে, দেখাও যে,

প্রতিটি অনুপাত $=\frac{1}{a+b+c}.$

১৯। যদি $(a+b+c)p=(b+c-a)q=(c+a-b)r=(a+b-c)s$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{p}.$

২০। যদি $lx=my=nz$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}=\frac{mn}{l^2}+\frac{nl}{m^2}+\frac{lm}{n^2}.$

২১। যদি $\frac{p}{q}=\frac{a^2}{b^2}$ এবং $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{p+q}{a}=\frac{p-q}{q}.$

১১·৪ ধারাবাহিক অনুপাত

মনে কর, রনির আয় 1000 টাকা, সনির আয় 1500 টাকা এবং সামির আয় 2500 টাকা। এখানে, রনির আয় : সনির আয় = 1000 : 1500 = 2 : 3; সনির আয় : সামির আয় = 1500 : 2500 = 3 : 5.

সুতরাং রনির আয় : সনির আয় : সামির আয় = 2 : 3 : 5.

দুইটি অনুপাত যদি ক : খ এবং খ : গ আকারের হয়, তাহলে তাদেরকে সাধারণত ক : খ : গ আকারে লেখা যায়। একে ধারাবাহিক অনুপাত বলা হয়। যেকোনো দুইটি বা ততোধিক অনুপাতকে এই আকারে প্রকাশ করা যায়। এখানে লক্ষণীয় যে, দুইটি অনুপাতকে ক : খ : গ আকারে প্রকাশ করতে হলে প্রথম অনুপাতটির উত্তর রাশি, দ্বিতীয় অনুপাতটির পূর্ব রাশির সমান হতে হবে। যেমন, 2 : 3 এবং 4 : 3 অনুপাত দুইটি ক : খ : গ আকারে প্রকাশ করতে হলে প্রথম অনুপাতটির উত্তর রাশিটিকে দ্বিতীয় অনুপাতটির পূর্ব রাশির সমান করতে হবে। অর্থাৎ ঐ দুইটি রাশিকে তাদের ল.সা.গু. এর সমান করতে হবে। এখানে, 3 এবং 4 এর ল.সা.গু. 12.

এখন, $2:3=\frac{2}{3}=\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{8}{12}=8:12$; আবার, $4:3=\frac{4}{3}=\frac{4\times3}{3\times3}=\frac{12}{9}=12:9$

অতএব 2 : 3 এবং 4 : 3 অনুপাত দুইটি ক : খ : গ আকারে হবে 8 : 12 : 9.

লক্ষ করি যে, উপরের উদাহরণে সামির আয় যদি 1125 টাকা হয়, তাহলে তাদের আয়ের অনুপাতও 8 : 12 : 9 আকারে লেখা যাবে।

উদাহরণ ১২। ক, খ ও গ এক জাতীয় রাশি এবং ক : খ = 3 : 4, খ : গ = 6 : 7 হলে, ক : খ : গ কত ?

সমাধান: $\frac{ক}{খ}=\frac{3}{4}=\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{9}{12}$ এবং $\frac{খ}{গ}=\frac{6}{7}=\frac{6\times2}{7\times2}=\frac{12}{14}$ [এখানে 4 ও 6 এর ল. সা. গু. 12]

$\therefore$ ক : খ : গ = 9 : 12 : 14.

উদাহরণ ১৩। একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 3 : 4 : 5; কোণ তিনটি ডিগ্রিতে প্রকাশ কর।

সমাধান : ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি = 180°

মনে করি, প্রদত্ত অনুপাত অনুসারে কোণ তিনটি যথাক্রমে 3x, 4x এবং 5x.

প্রশ্নানুসারে, $3x + 4x + 5x = 180^\circ$ বা, $12x = 180^\circ$ বা, $x = 15^\circ$

অতএব, কোণ তিনটি হল $3x = 3 \times 15^\circ = 45^\circ$

$4x = 4 \times 15^\circ = 60^\circ$

এবং $5x = 5 \times 15^\circ = 75^\circ$

উদাহরণ ১৪। যদি কোনো বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ 10% বৃদ্ধি পায়, তবে তার ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে ?

সমাধান : মনে করি, বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a মিটার।

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল a^2 বর্গমিটার।

10% বৃদ্ধি পেলে প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য হয় ($a + a$ এর 10%) মিটার বা $1\cdot10a$ মিটার।

তখন, বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $(1\cdot10a)^2$ বর্গমিটার বা $1\cdot21a^2$ বর্গমিটার

ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায় $(1\cdot21a^2 - a^2) = 0.21a^2$ বর্গমিটার

$\therefore$ ক্ষেত্রফল শতকরা বৃদ্ধি পাবে $\dfrac{0\cdot 21a^2}{a^2}\times 100\% = 21\%$

কাজ ১। তোমাদের শ্রেণিতে 35 জন ছাত্র ও 25 জন ছাত্রী আছে। বনভোজনে খিচুরি খাওয়ার জন্য প্রত্যেক ছাত্র ও ছাত্রীর প্রদত্ত চাল ও ডালের অনুপাত যথাক্রমে 3 : 1 এবং 5 : 2 হলে, মোট চাল ও মোট ডালের অনুপাত বের কর।

১১·৫ সমানুপাতিক ভাগ

কোনো রাশিকে নির্দিষ্ট অনুপাতে ভাগ করাকে সমানুপাতিক ভাগ বলা হয়। S কে $a:b:c:d$ অনুপাতে ভাগ করতে হলে, S কে মোট $(a+b+c+d)$ ভাগ করে যথাক্রমে a, b, c ও d ভাগ নিতে হয়।

অতএব

১ম অংশ $= S$ এর $\dfrac{a}{a+b+c+d} = \dfrac{Sa}{a+b+c+d}$

২য় অংশ $= S$ এর $\dfrac{b}{a+b+c+d} = \dfrac{Sb}{a+b+c+d}$

৩য় অংশ $= S$ এর $\dfrac{c}{a+b+c+d} = \dfrac{Sc}{a+b+c+d}$

৪র্থ অংশ $= S$ এর $\dfrac{d}{a+b+c+d} = \dfrac{Sd}{a+b+c+d}$

এভাবে যেকোনো রাশিকে যেকোনো নির্দিষ্ট অনুপাতে ভাগ করা যায়।

উদাহরণ ১৫। তিন ব্যক্তির মধ্যে 5100 টাকা এরূপে ভাগ করে দাও যেন, ১ম ব্যক্তির অংশ : ২য় ব্যক্তির অংশ : ৩য় ব্যক্তির অংশ $=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{9}$ হয়।

সমাধান : এখানে $\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{9} = \left(\dfrac{1}{2}\times 18\right):\left(\dfrac{1}{3}\times 18\right):\left(\dfrac{1}{9}\times 18\right)$ [2, 3 ও 9 এর ল.সা.গু. 18]

$= 9:6:2$

অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = 9 + 6 + 2 = 17.

১ম ব্যক্তির অংশ $= 5100\times\dfrac{9}{17}$ টাকা = 2700 টাকা

২য় ব্যক্তির অংশ $= 5100\times\dfrac{6}{17}$ টাকা = 1800 টাকা

৩য় ব্যক্তির অংশ $= 5100\times\dfrac{2}{17}$ টাকা = 600 টাকা

অতএব তিন ব্যক্তি যথাক্রমে 2700 টাকা , 1800 টাকা এবং 600 টাকা পাবেন।

অনুশীলনী ১১.২

১। a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. $a^2 = bc$ খ. $b^2 = ac$

গ. $ab = bc$ ঘ. $a = b = c$

২। আরিফ ও আকিবের বয়সের অনুপাত 5:3; আরিফের বয়স 20 বছর হলে, কত বছর পর তাদের বয়সের অনুপাত 7:5 হবে?

ক. 5 বছর খ. 6 বছর

গ. 8 বছর ঘ. 10 বছর

৩। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর:

i সমানুপাতের চারটি রাশিই একজাতীয় হওয়ার প্রয়োজন হয় না।

ii দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অনুপাত তাদের ভূমিদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

iii $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ হলে, এদের প্রতিটি অনুপাতের মান $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$

উপরের তথ্যগুলোর ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

ΔABC এর কোণগুলোর অনুপাত 2:3:5 এবং ABCD চতুর্ভুজের কোণ চারটির অনুপাত 3:4:5:6; তথ্যের ভিত্তিতে ৪ ও ৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

৪। একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ হলে তার ক্ষেত্রফল কতগুণ বৃদ্ধি পাবে?

ক. ২ গুণ খ. ৪ গুণ

গ. ৮ গুণ ঘ. ৬ গুণ

৫। $x : y = 7 : 5$, $y : z = 5 : 7$ হলে $x : z =$ কত ?

ক. 35 : 49 খ. 35 : 35

গ. 25 : 49 ঘ. 49 : 25

৬। একটি কাঠের পুল তৈরির প্রাক্কলিত ব্যয় 90,000 টাকা । কিন্তু খরচ বেশি হয়েছে 21,600 টাকা। খরচ শতকরা কত বৃদ্ধি পেয়েছে ?

৭। ধানে চাল ও তুষের অনুপাত 7 : 3 হলে, এতে শতকরা কী পরিমাণ চাল আছে ?

৮। 1 ঘন সে. মি. কাঠের ওজন 7 ডেসিগ্রাম। কাঠের ওজন সমআয়তন পানির ওজনের শতকরা কত ভাগ ?

৯। ক, খ ,গ ,ঘ এর মধ্যে 300 টাকা এমনভাবে ভাগ করে দাও যেন, ক এর অংশ : খ এর অংশ = 2 : 3, খ এর অংশ : গ এর অংশ = 1 :2 এবং গ এর অংশ : ঘ এর অংশ = 3 : 2 হয়।

১০। তিনজন জেলে 690 টি মাছ ধরেছে। তাদের অংশের অনুপাত $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ এবং $\frac{5}{6}$ হলে, কে কয়টি মাছ পেল?

১১। একটি ত্রিভুজের পরিসীমা 45 সে. মি.। বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3: 5: 7 হলে , প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ নির্ণয় কর।

১২। 1011 টাকাকে $\frac{3}{4}:\frac{4}{5}:\frac{6}{7}$ অনুপাতে বিভক্ত কর।

১৩। দুইটি সংখ্যার অনুপাত 5 : 7 এবং তাদের গ. সা. গু. 4 হলে, সংখ্যা দুইটির ল. সা. গু. কত ?

১৪। ক্রিকেট খেলায় সাকিব, মুশফিকুর ও মাশরাফী 171 রান করলো। সাকিব ও মুশফিকুরের এবং মুশফিকুর ও মাশরাফীর রানের অনুপাত 3 : 2 হলে কে কত রান করেছে ?

১৫। একটি অফিসে 2 জন কর্মকর্তা, 7 জন করণিক এবং 3 জন পিওন আছে। একজন পিওন 1 টাকা পেলে একজন করণিক পায় 2 টাকা, একজন কর্মকর্তা পায় 4 টাকা। তাদের সকলের মোট বেতন 150,000 টাকা হলে, কে কত বেতন পায় ?

১৬। একটি সমিতির নেতা নির্বাচনে দুইজন প্রতিদ্বন্দ্বীর মধ্যে ডোনাল্ড সাহেব 4 : 3 ভোটে জয়লাভ করলেন। যদি মোট সদস্য সংখ্যা 581 হয় এবং 91 জন সদস্য ভোট না দিয়ে থাকেন, তবে ডোনাল্ড সাহেবের প্রতিদ্বন্দ্বী কত ভোটের ব্যবধানে পরাজিত হয়েছেন ?

১৭। যদি কোনো বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ 20% বৃদ্ধি পায়, তবে তার ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে ?

১৮। একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% বৃদ্ধি এবং প্রস্থ 10% হ্রাস পেলে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি বা হ্রাস পাবে ?

১৯। একটি মাঠের জমিতে সেচের সুযোগ আসার আগের ও পরের ফলনের অনুপাত 4 : 7. ঐ মাঠে যে জমিতে আগে 304 কুইন্টাল ধান ফলতো, সেচ পাওয়ার পরে তার ফলন কত হবে ?

২০। ধান ও ধান থেকে উৎপন্ন চালের অনুপাত 3 : 2 এবং গম ও গম থেকে উৎপন্ন সুজির অনুপাাত 4 : 3 হলে, সমান পরিমাণের ধান ও গম থেকে উৎপন্ন চাল ও সুজির অনুপাত বের কর ।

২১। একটি জমির ক্ষেত্রফল 432 বর্গমিটার। ঐ জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সঙ্গে অপর একটি জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত যথাক্রমে 3 : 4 এবং 2 : 5 হলে, অপর জমির ক্ষেত্রফল কত ?

২২। জেমি ও সিমি একই ব্যাংক থেকে একই দিনে 10% সরল মুনাফায় আলাদা আলাদা পরিমাণ অর্থ ঋণ নেয়। জেমি 2 বছর পর মুনাফা–আসলে যত টাকা শোধ করে 3 বছর পর সিমি মুনাফা–আসলে তত টাকা শোধ করে। তাদের ঋণের অনুপাত নির্ণয় কর।

২৩। একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত 5:12:13 এবং পরিসীমা 30 সে.মি.

ক. ত্রিভুজটি অঙ্কন কর এবং কোণ ভেদে ত্রিভুজটি কী ধরনের তা লিখ।

খ. বৃহত্তর বাহুকে দৈর্ঘ্য এবং ক্ষুদ্রতর বাহুকে প্রস্থ ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের কর্ণের সমান বাহুবিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. উক্ত আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% এবং প্রস্থ 20% বৃদ্ধি পেলে ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?

২৪। একদিন কোনো ক্লাসে অনুপস্থিত ও উপস্থিত শিক্ষার্থীর অনুপাত 1:4।

ক. অনুপস্থিত শিক্ষার্থীদেরকে মোট শিক্ষার্থীর শতকরায় প্রকাশ কর।

খ. 10 জন শিক্ষার্থী বেশি উপস্থিত হলে অনুপস্থিত ও উপস্থিত শিক্ষার্থীর অনুপাত হতো 1:9. মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত ?

গ. মোট শিক্ষার্থীর মধ্যে ছাত্র সংখ্যা ছাত্রী সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 20 জন কম। ছাত্র ও ছাত্রীসংখ্যার অনুপাত নির্ণয় কর।

দ্বাদশ অধ্যায়

দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ

(Simultaneous Equations with Two Variables)

গাণিতিক সমস্যা সমাধানের জন্য বীজগণিতের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হলো সমীকরণ। ষষ্ঠ ও সপ্তম শ্রেণিতে আমরা সরল সমীকরণের ধারণা পেয়েছি এবং কীভাবে এক চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণ সমাধান করতে হয় তা জেনেছি। অষ্টম শ্রেণিতে সরল সমীকরণ প্রতিস্থাপন ও অপনয়ন পদ্ধতিতে এবং লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করেছি। কীভাবে বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সরল সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান করা হয় তাও শিখেছি। এ অধ্যায়ে সরল সহসমীকরণের ধারণা সম্প্রসারণ করা হয়েছে ও সমাধানের আরো নতুন পদ্ধতি সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। এ ছাড়াও এ অধ্যায়ে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান ও বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সহসমীকরণ গঠন ও সমাধান সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সঙ্গতি যাচাই করতে পারবে।
- দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি সমীকরণের পরস্পর নির্ভরশীলতা যাচাই করতে পারবে।
- সমাধানের আড়গুণন পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- বাস্তবভিত্তিক গাণিতিক সমস্যার সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে পারবে।
- লেখচিত্রের সাহায্যে দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ সমাধান করতে পারবে।

১২·১ সরল সহসমীকরণ

সরল সহসমীকরণ বলতে দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি সরল সমীকরণকে বুঝায় যাদের যুগপৎ সমাধান চাওয়া হয়, এরূপ দুইটি সমীকরণকে একত্রে সরল সমীকরণজোটও বলে। অষ্টম শ্রেণিতে আমরা এরূপ সমীকরণজোটের সমাধান করেছি ও বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে শিখেছি। এ অধ্যায়ে এ সম্পর্কে আরো বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

প্রথমে আমরা $2x+y=12$ সমীকরণটি বিবেচনা করি। এটি একটি দুই চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণ।

সমীকরণটিতে বামপক্ষে x ও y এর এমন মান পাওয়া যাবে কি যাদের প্রথমটি দ্বিগুণের সাথে দ্বিতীয়টির যোগফল ডানপক্ষের 12 এর সমান হয়, অর্থাৎ ঐ মান দুইটি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় ?

এখন, $2x+y=12$ সমীকরণটি থেকে নিচের ছকটি পূরণ করি :

x এর মান	y এর মান	বামপক্ষ $(2x+y)$ এর মান	ডানপক্ষ
-2	16	$-4+16=12$	12
0	12	$0+12=12$	12
3	6	$6+6=12$	12
5	2	$10+2=12$	12
....	.....	..... $=12$	12

সমীকরণটির অসংখ্য সমাধান আছে। তার মধ্যে চারটি সমাধান $(-2,16)$, $(0,12)$, $(3,6)$ ও $(5,2)$।

আবার, অন্য একটি সমীকরণ $x-y=3$ নিয়ে নিচের ছকটি পূরণ করি :

x এর মান	y এর মান	বামপক্ষ $(x-y)$ এর মান	ডানপক্ষ
-2	-5	$-2+5=3$	3
0	-3	$0+3=3$	3
3	0	$3-0=3$	3
5	2	$5-2=3$	3
....	.....	..... $=3$	3

সমীকরণটির অসংখ্য সমাধান আছে। তার মধ্যে চারটি সমাধান :

$(-2,-5), (0,-3), (3,0)$ ও $(5,2)$

যদি আলোচ্য সমীকরণ দুইটিকে একত্রে জোট হিসেবে ধরা হয়, তবে একমাত্র $(5,2)$ দ্বারা উভয় সমীকরণ যুগপৎ সিদ্ধ হয়। আর অন্য কোনো মান দ্বারা উভয় সমীকরণ যুগপৎ সিদ্ধ হবে না।

অতএব, সমীকরণজোট $2x+y=12$ এবং $x-y=3$ এর সমাধান : $(x,y)=(5,2)$

কাজ : $x-2y+1=0$ ও $2x+y-3=0$ সমীকরণদ্বয়ের প্রত্যেকটির পাঁচটি করে সমাধান লিখ যেন তন্মধ্যে সাধারণ সমাধানটিও থাকে।

১২·২ দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সমাধান যোগ্যতা

(ক) পূর্বের আলোচিত সমীকরণজোট $\left.\begin{aligned} 2x+y&=12 \\ x-y&=3 \end{aligned}\right\}$ এর অনন্য (একটি মাত্র) সমাধান পাওয়া গেছে।

এরূপ সমীকরণজোটকে সমঞ্জস $(Consistent)$ বলা হয়। সমীকরণ দুইটির x ও y এর সহগ তুলনা করে (সহগের অনুপাত নিয়ে) পাই, $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{-1}$, সমীকরণজোটটির একটি সমীকরণকে অন্যটির মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় না। এ জন্য এরূপ সমীকরণকে পরস্পর অনির্ভরশীল $(Independent)$ সমীকরণজোট বলা হয়।

সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল সমীকরণজোটর ক্ষেত্রে অনুপাতগুলো সমান নয়।

এক্ষেত্রে ধ্রুবকপদ তুলনা করার প্রয়োজন হয় না।

(খ) এখন আমরা $\left.\begin{aligned} 2x-y&=6 \\ 4x-2y&=12 \end{aligned}\right\}$ সমীকরণজোটটি বিবেচনা করি। এই দুইটি সমীকরণ সমাধান করা যাবে কি ?

এখানে, ১ম সমীকরণটির উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করলে ২য় সমীকরণটি পাওয়া যাবে। আবার, ২য় সমীকরণের উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করলে ১ম সমীকরণটি পাওয়া যাবে। অর্থাৎ, সমীকরণ দুইটি পরস্পর নির্ভরশীল।

আমরা জানি, ১ম সমীকরণটির অসংখ্য সমাধান আছে। কাজেই, ২য় সমীকরণটিরও ঐ একই অসংখ্য সমাধান আছে। এরূপ সমীকরণজোটকে ও পরস্পর নির্ভরশীল $(dependent)$ সমীকরণজোট বলে। এরূপ সমীকরণজোটের অসংখ্য সমাধান আছে।

এখানে, সমীকরণ দুইটির x ও y এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ তুলনা করে পাই, $\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}=\frac{6}{12}\left(=\frac{1}{2}\right)$

অর্থাৎ, সমঞ্জস ও পরস্পর নির্ভরশীল সমীকরণজোটের ক্ষেত্রে অনুপাতগুলো সমান হয়।

(গ) এবারে আমরা $\left.\begin{aligned} 2x+y &= 12 \\ 4x+2y &= 5 \end{aligned}\right\}$ সমীকরণজোটটি সমাধান করার চেষ্টা করি।

এখানে, ১ম সমীকরণটির উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে পাই, $4x+2y=24$

২য় সমীকরণটি $4x+2y=5$

বিয়োগ করে পাই, $0=19$, যা অসম্ভব।

কাজেই বলতে পারি, এ ধরনের সমীকরণজোট সমাধান করা সম্ভব নয়। এরূপ সমীকরণজোট অসমঞ্জস (*inconsistent*) ও পরস্পর অনির্ভরশীল। এরূপ সমীকরণজোটের কোনো সমাধান নেই।

এখানে সমীকরণ দুইটির x ও y এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ তুলনা করে পাই, $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\neq\frac{12}{5}$.

অর্থাৎ, অসমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল সমীকরণজোটের ক্ষেত্রে চলকের সহগের অনুপাতগুলো ধ্রুবকের অনুপাতের সমান নয়।

সাধারণভাবে, $\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y &= c_1 \\ a_2x+b_2y &= c_2 \end{aligned}\right\}$ সমীকরণজোটটি নিয়ে নিচের ছকের মাধ্যমে দুইটি সরল সমীকরণের সমাধান যোগ্যতার শর্ত উলেখ করা হলো :

	সমীকরণজোট	সহগ ও ধ্রুবক পদ তুলনা	সমঞ্জস/ অসমঞ্জস	পরস্পর নির্ভরশীল/ অনির্ভরশীল	সমাধান আছে (কয়টি)/নেই
(i)	$a_1x+b_1y=c_1$ $a_2x+b_2y=c_2$	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$	সমঞ্জস	অনির্ভরশীল	আছে (একটিমাত্র)
(ii)	$a_1x+b_1y=c_1$ $a_2x+b_2y=c_2$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	সমঞ্জস	নির্ভরশীল	আছে (অসংখ্য)
(iii)	$a_1x+b_1y=c_1$ $a_2x+b_2y=c_2$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$	অসমঞ্জস	অনির্ভরশীল	নেই

এখন, যদি কোনো সমীকরণজোটে উভয় সমীকরণে ধ্রুবক পদ না থাকে, অর্থাৎ, $c_1=c_2=0$ হয়, তবে ছকের

(i) অনুযায়ী $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ হলে, সমীকরণজোট সর্বদা সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল। সেক্ষেত্রে একটিমাত্র (অনন্য) সমাধান থাকবে।

(ii) ও (iii) থেকে $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ হলে, সমীকরণজোট সমঞ্জস ও পরস্পর নির্ভরশীল। সেক্ষেত্রে অসংখ্য সমাধান থাকবে।

উদাহরণ : নিচের সমীকরণজোটগুলো সমঞ্জস/অসমঞ্জস, নির্ভরশীল/অনির্ভরশীল কি না ব্যাখ্যা কর এবং এদের সমাধানের সংখ্যা নির্দেশ কর।

(ক) $x+3y=1$, $2x+6y=2$ (খ) $2x-5y=3$, $x+3y=1$ (গ) $3x-5y=7$, $6x-106y=15$

সমাধান :

(ক) প্রদত্ত সমীকরণজোট : $\left.\begin{aligned} x+3y &= 1 \\ 2x+6y &= 2 \end{aligned}\right\}$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{2}$

y ,, ,, ,, $\frac{3}{6}$ বা $\frac{1}{2}$

ধ্রুবক পদদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

অতএব, সমীকরণজোটটি সমঞ্জস ও পরস্পর নির্ভরশীল। সমীকরণজোটটির অসংখ্য সমাধান আছে।

(খ) প্রদত্ত সমীকরণজোট : $\left.\begin{aligned} 2x-5y &= 3 \\ x+3y &= 1 \end{aligned}\right\}$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{2}{1}$

y ,, ,, ,, $\frac{-5}{3}$

আমরা পাই, $\frac{2}{1}\neq\frac{-5}{3}$

$\therefore$ সমীকরণজোটটি সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল। সমীকরণজোটটির একটিমাত্র (অনন্য) সমাধান আছে।

(গ) প্রদত্ত সমীকরণজোট : $3x-5y=7$

$6x-10y=15$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{3}{6}$ বা $\frac{1}{2}$

y ,, ,, ,, $\frac{-5}{-10}$ বা $\frac{1}{2}$

ধ্রুবক পদদ্বয়ের অনুপাত $\frac{7}{15}$

আমরা পাই, $\frac{3}{6}=\frac{-5}{-10}\neq\frac{7}{15}$

$\therefore$ সমীকরণজোটটি অসমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল। সমীকরণজোটটির কোনো সমাধান নেই।

কাজ : $x-2y+1=0, 2x+y-3=0$ সমীকরণজোটটি সমঞ্জস কি না, পরস্পর নির্ভরশীল কি না যাচাই কর এবং সমীকরণজোটটির কয়টি সমাধান থাকতে পারে তা নির্দেশ কর।

অনুশীলনী ১২·১

নিচের সরল সহসমীকরণগুলো সমঞ্জস, পরস্পর নির্ভরশীল/অনির্ভরশীল কি না যুক্তিসহ উল্লেখ কর এবং এগুলোর সমাধানের সংখ্যা নির্দেশ কর :

১। $x-y=4$
$x+y=10$

২। $2x+y=3$
$4x+2y=6$

৩। $x-y-4=0$
$3x-3y-10=0$

৪। $3x+2y=0$
$6x+4y=0$

৫। $3x+2y=0$
$9x-6y=0$

৬। $5x-2y-16=0$
$3x-\frac{6}{5}y=2$

৭। $-\frac{1}{2}x+y=-1$
$x-2y=2$

৮। $-\frac{1}{2}x-y=0$
$x-2y=0$

৯। $-\frac{1}{2}x+y=-1$
$x+y=5$

১০। $ax-cy=0$
$cx-ay=c^2-a^2.$

১২·৩ সরল সহসমীকরণের সমাধান

আমরা শুধু সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল সরল সহসমীকরণের সমাধান সম্পর্কে আলোচনা করবো। এরূপ সমীকরণজোটের একটিমাত্র (অনন্য) সমাধান আছে।

এখানে, সমাধানের চারটি পদ্ধতির উলেখ করা হলো :

(১) প্রতিস্থাপন পদ্ধতি (২) অপনয়ন পদ্ধতি (৩) আড়গুণন পদ্ধতি ও (৪) লৈখিক পদ্ধতি।

আমরা অষ্টম শ্রেণিতে প্রতিস্থাপন ও অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান কীভাবে করতে হয় জেনেছি। এ দুই পদ্ধতির একটি করে উদাহরণ দেওয়া হলো :

উদাহরণ ১। প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান কর :

$$2x+y=8$$
$$3x-2y=5$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $2x + y = 8$.............(1)

$3x - 2y = 5$...........(2)

সমীকরণ (1) হতে পাই, $y = 8 - 2x$.........(3)

সমীকরণ (2) এ y এর মান $8 - 2x$ বসিয়ে পাই,

$3x - 2(8 - 2x) = 5$

বা $3x - 16 + 4x = 5$

বা $3x + 4x = 5 + 16$

বা $7x = 21$

বা $x = 3$

x এর মান সমীকরণ (3) এ বসিয়ে পাই,

$y = 8 - 2 \times 3$

$= 8 - 6$

$= 2$

$\therefore$ সমাধান $(x, y) = (3,2)$

প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান : সুবিধামত একটি সমীকরণ থেকে একটি চলকের মান অপর চলকের মাধ্যমে প্রকাশ করে প্রাপ্ত মান অপর সমীকরণে বসালে এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ পাওয়া যায়। অতঃপর সমীকরণটি সমাধান করে চলকটির মান পাওয়া যায়। এই মান প্রদত্ত সমীকরণের যে কোনোটিতে বসানো যেতে পারে। তবে যেখানে একটি চলককে অপর চলকের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়েছে সেখানে বসালে সমাধান সহজ হয়। এখান থেকে অপর চলকের মান পাওয়া যায়।

উদাহরণ ২। অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান কর : $2x + y = 8$

$3x - 2y = 5$

[**দ্রষ্টব্য :** প্রতিস্থাপন ও অপনয়ন পদ্ধতির পার্থক্য বোঝাতেই উদাহরণ ১ এর সমীকরণদ্বয়ই উদাহরণ ২ এ নেয়া হলো]

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $2x + y = 8$.............(1)

$3x - 2y = 5$...........(2)

সমীকরণ (1) এর উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে, $4x + 2y = 16$.............(3)

সমীকরণ (2) হতে, $3x - 2y = 5$...........(2)

সমীকরণ (2) ও (3) যোগ করে পাই,

$7x = 21$

বা, $x = 3$

x এর মান সমীকরণ (1) এ বসিয়ে পাই,

$2 \times 3 + y = 8$

বা, $y = 8 - 6$

বা, $y = 2$

$\therefore$ সমাধান $(x, y) = (3,2)$

অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান : সুবিধামত একটি সমীকরণকে বা উভয় সমীকরণকে এরূপ সংখ্যা দিয়ে গুণ করতে হবে যেন গুণনের পর উভয় সমীকরণের যেকোনো একটি চলকের সহগের পরমমান সমান হয়। এরপর প্রয়োজনমত সমীকরণ দুইটিকে যোগ বা বিয়োগ করলে সহগ সমানকৃত চলকটি অপনীত বা অপসারিত হয়। তারপর সমীকরণটি সমাধান করলে বিদ্যমান চলকটির মান পাওয়া যায়। ঐ মান সুবিধামত প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের যেকোনোটিতে বসালে অপর চলকটির মান পাওয়া যায়।

(৩) আড়গুণন পদ্ধতি :

আড়গুণন পদ্ধতিকে বজ্রগুণন পদ্ধতিও বলে।

নিচের সমীকরণ দুইটি বিবেচনা করি :

$$a_1x+b_1y+c_1=0..........(1)$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0.........(2)$$

সমীকরণ (1) কে b_2 দিয়ে ও সমীকরণ (2) কে b_1 দিয়ে গুণ করে পাই,

$$a_1b_2x+b_1b_2y+b_2c_1=0.........(3)$$
$$a_2b_1x+b_1b_2y+b_1c_2=0.........(4)$$

সমীকরণ (3) থেকে সমীকরণ (4) বিয়োগ করে পাই,

$$(a_1b_2-a_2b_1)x+b_2c_1-b_1c_2=0$$

বা, $(a_1b_2-a_2b_1)x=b_1c_2-b_2c_1$

বা, $\dfrac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$..........(5)

আবার, সমীকরণ (1) কে a_2 দিয়ে ও সমীকরণ (2) কে a_1 দিয়ে গুণ করে পাই,

$$a_1a_2x+a_2b_1y+c_1a_2=0.........(6)$$
$$a_1a_2x+a_1b_2y+c_2a_1=0.........(7)$$

সমীকরণ (6) থেকে সমীকরণ (7) বিয়োগ করে পাই,

$$(a_2b_1-a_1b_2)y+c_1a_2-c_2a_1=0$$

বা, $-(a_1b_2-a_2b_1)y=-(c_1a_2-c_2a_1)$

বা, $\dfrac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$..........(8)

(5) ও (8) থেকে পাই,

$$\boxed{\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}}$$

x ও y এর এরূপ সম্পর্ক থেকে এদের মান নির্ণয়ের কৌশলকে আড়গুণন পদ্ধতি বলে।

x ও y এর উলিখিত সম্পর্ক থেকে পাই,

$\dfrac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$, বা $x=\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$

আবার, $\dfrac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$, বা $y=\dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সমাধান : $(x,y)=\left(\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)$

লক্ষ করি :

সমীকরণ	x ও y এর মধ্যে সম্পর্ক	মনে রাখার চিত্র
$a_1x+b_1y+c_1=0$ $a_2x+b_2y+c_2=0$	$\dfrac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\dfrac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$	$\begin{array}{c\|cccc} & x & y & 1 & \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \end{array}$

দ্রষ্টব্য : প্রদত্ত উভয় সমীকরণের ধ্রুবক পদ ডানপক্ষে রেখেও আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করা যায়। তবে সেক্ষেত্রে চিহ্নের কিছু পরিবর্তন হবে। কিন্তু সমাধান একই পাওয়া যাবে।

> কাজ : $\left.\begin{array}{l} 4x-y-7=0 \\ 3x+y\quad\;\, =0 \end{array}\right\}$ সমীকরণজোটকে
>
> $\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{array}\right\}$ সমীকরণজোটের আকারে প্রকাশ করলে
>
> $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ এর মান বের কর।

উদাহরণ ৩। আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান কর : $6x-y=1$
$3x+2y=13$

সমাধান : পক্ষান্তর প্রক্রিয়ায় প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের ডানপক্ষ 0 (শূন্য) করে পাই,

$6x-y-1=0$
$3x+2y-13=0$

সমীকরণদ্বয়কে যথাক্রমে $a_1x+b_1y_2+c_1=0$
এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$
এর সাথে তুলনা করে পাই, $a_1=6, b_1=-1, c_1=-1$
$a_2=3, b_2=2, c_2=-13$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

বা $\dfrac{x}{(-1)\times(-13)-2\times(-1)}=\dfrac{y}{(-1)\times 3-(-13)\times 6}=\dfrac{1}{6\times 2-3\times(-1)}$

বা $\dfrac{x}{13+2}=\dfrac{y}{-3+78}=\dfrac{1}{12+3}$

বা $\dfrac{x}{15}=\dfrac{y}{75}=\dfrac{1}{15}$

$\therefore \dfrac{x}{15}=\dfrac{1}{15}$ বা $x=\dfrac{15}{15}=1$

ব্যাখ্যা

$$\begin{array}{c|cccc} & x & y & 1 & \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \end{array}$$

$\downarrow$

$$\begin{array}{c|cccc} & x & y & 1 & \\ 6 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & -13 & 3 & 2 \end{array}$$

আবার, $\frac{y}{75}=\frac{1}{15}$ বা $y=\frac{75}{15}=5$

$\therefore$ সমাধান $(x, y)=(1,5)$

উদাহরণ ৪। আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান কর : $3x-4y=0$

$$2x-3y=-1$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$$\left.\begin{array}{l}3x-4y=0\\2x-3y=-1\end{array}\right\} \quad \text{বা,} \quad \left.\begin{array}{l}3x-4y+0=0\\2x-3y+1=0\end{array}\right\}$$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{-4\times1-(-3)\times0}=\frac{y}{0\times2-1\times3}=\frac{1}{3\times(-3)-2\times(-4)}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & x & y & 1 & \\ 3 & -4 & 0 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \end{array}$$

বা $\frac{x}{-4+0}=\frac{y}{0-3}=\frac{1}{-9+8}$

বা $\frac{x}{-4}=\frac{y}{-3}=\frac{1}{-1}$

বা $\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{1}{1}$

$\therefore \frac{x}{4}=\frac{1}{1}$ বা, $x=4$

আবার, $\frac{y}{3}=\frac{1}{1}$ বা, $y=3$

$\therefore$ সমাধান $(x, y)=(4,3)$

উদাহরণ ৫। আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান কর : $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=8$

$$\frac{5x}{4}-3y=-3$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে $ax+by+c=0$ আকারে সাজিয়ে পাই,

$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=8$

বা $\frac{3x+2y}{6}=8$

বা $3x+2y-48=0$

আবার, $\frac{5x}{4}-3y=-3$

বা $\frac{5x-12y}{4}=-3$

বা $5x-12y+12=0$

$\therefore$ সমীকরণদ্বয় $3x+2y-48=0$
$5x-12y+12=0$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{2\times12-(-12)\times(-48)}=\frac{y}{(-48)\times5-12\times3}=\frac{1}{3\times(-12)-5\times2}$$

	x		y	1
3	2	−48	3	2
5	−12	12	5	−12

বা $\frac{x}{24-576}=\frac{y}{-240-36}=\frac{1}{-36-10}$

বা $\frac{x}{-552}=\frac{y}{-276}=\frac{1}{-46}$

বা $\frac{x}{552}=\frac{y}{276}=\frac{1}{46}$

$\therefore$ $\frac{x}{552}=\frac{1}{46}$ বা, $x=\frac{552}{46}=12$

আবার, $\frac{y}{276}=\frac{1}{46}$ বা. $y=\frac{276}{46}=6$

$\therefore$ সমাধান : $(x,y)=(12,6)$

সমাধানের শুদ্ধি পরীক্ষা : প্রাপ্ত x ও y এর মান প্রদত্ত সমীকরণে বসিয়ে পাই,

১ম সমীকরণে, বামপক্ষ $=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=\frac{12}{2}+\frac{6}{3}=6+2$
$=8=$ ডানপক্ষ

২য় সমীকরণে, বামপক্ষ $=\frac{5x}{4}-3y=\frac{5\times12}{4}-3\times6$
$=15-18=-3$ $=$ ডানপক্ষ।

$\therefore$ সমাধান শুদ্ধ হয়েছে।

উদাহরণ ৬। আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান কর : $ax-by=ab=bx-ay.$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়,

$$\left.\begin{array}{l}ax-by=ab\\bx-ay=ab\end{array}\right\} \text{ বা, } \left.\begin{array}{l}ax-by-ab=0\\bx-ay-ab=0\end{array}\right\}$$

$$\therefore \frac{x}{(-b)\times(-ab)-(-a)(-ab)}=\frac{y}{(-ab)\times b-(-ab)\times a}=\frac{1}{a\times(-a)-b\times(-b)}$$

	x		y	1
a	−b	−ab	a	−b
b	−a	−ab	b	−a

বা $\frac{x}{ab^2-a^2b}=\frac{y}{-ab^2+a^2b}=\frac{1}{-a^2+b^2}$

বা $\dfrac{x}{-ab(a-b)} = \dfrac{y}{ab(a-b)} = \dfrac{1}{-(a+b)(a-b)}$

বা $\dfrac{x}{ab(a-b)} = \dfrac{y}{-ab(a-b)} = \dfrac{1}{(a+b)(a-b)}$

$\therefore \dfrac{x}{ab(a-b)} = \dfrac{1}{(a+b)(a-b)}$, বা $x = \dfrac{ab(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \dfrac{ab}{a+b}$

আবার, $\dfrac{y}{-ab(a-b)} = \dfrac{1}{(a+b)(a-b)}$, বা $y = \dfrac{-ab(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \dfrac{-ab}{a+b}$

$\therefore (x, y) = \left(\dfrac{ab}{a+b}, \dfrac{-ab}{a+b}\right)$

অনুশীলনী ১২·২

প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান কর (১ – ৩) :

১। $7x - 3y = 31$, $9x - 5y = 41$

২। $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$, $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1$

৩। $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2$, $ax + by = a^2 + b^2$

অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান কর (৪ – ৬) :

৪। $7x - 3y = 31$, $9x - 5y = 41$

৫। $7x - 8y = -9$, $5x - 4y = -3$

৬। $ax + by = c$, $a^2x + b^2y = c^2$

আড়গুণন পদধতিতে সমাধান কর (৭ – ১৫) :

৭। $2x + 3y + 5 = 0$, $4x + 7y + 6 = 0$

৮। $3x - 5y + 9 = 0$, $5x - 3y - 1 = 0$

৯। $x + 2y = 7$, $2x - 3y = 0$

১০। $4x + 3y = -12$, $2x = 5$

১১। $-7x + 8y = 9$, $5x - 4y = -3$

১২। $3x - y - 7 = 0 = 2x + y - 3$

১৩। $ax + by = a^2 + b^2$, $2bx - ay = ab$

১৪। $y(3 + x) = x(6 + y)$, $3(3 + x) = 5(y - 1)$

১৫। $(x + 7)(y - 3) + 7 = (y + 3)(x - 1) + 5$, $5x - 11y + 35 = 0$

১২·৪ লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান

দুই চলকবিশিষ্ট একটি সরল সমীকরণে বিদ্যমান চলক x ও y এর সম্পর্ককে চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। এই চিত্রকে ঐ সম্পর্কের লেখচিত্র বলে। এ জাতীয় সমীকরণের লেখচিত্রে অসংখ্য বিন্দু থাকে। এরূপ কয়েকটি বিন্দু স্থাপন করে এদের পরস্পর সংযুক্ত করলেই লেখচিত্র পাওয়া যায়।

সরল সহসমীকরণের প্রত্যেকটির অসংখ্য সমাধান রয়েছে। প্রত্যেকটি সমীকরণের লেখ একটি সরলরেখা। সরলরেখাটির প্রত্যেকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। কোনো লেখ নির্দিষ্ট করতে দুই বা ততোধিক বিন্দু নেয়া আবশ্যক।

এখন আমরা নিচের সমীকরণজোটটি সমাধান করার চেষ্টা করবো : $2x+y=3$..........(1)

$4x+2y=6$........(2)

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $y=3-2x$.

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও পাশের ছকটি তৈরি করি :

x	-1	0	3
y	5	3	-3

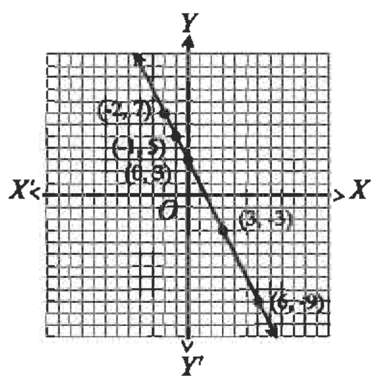
$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(-1,5),(0,3)$ ও $(3,-3)$।

আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই, $2y=6-4x$ বা, $y=\dfrac{6-4x}{2}$

x	-2	0	6
y	7	3	-9

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও পাশের ছকটি তৈরি করি :

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(-2,7),(0,3)$ ও $(6,-9)$।



মনে করি, ছক কাগজে XOX' ও YOY' যথাক্রমে x–অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু।

ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এখন সমীকরণ (1) হতে প্রাপ্ত $(-1,5),(0,3)$ ও $(3,-3)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা।

আবার, সমীকরণ (2) হতে প্রাপ্ত $(-2,7),(0,3)$ ও $(6,-9)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাঁদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরলরেখা। তবে লক্ষ করি, সরলরেখা দুইটি পরস্পরের উপর সমাপতিত হয়ে একটি সরলরেখায় পরিণত হয়েছে। আবার, সমীকরণ (2) এর উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করলে সমীকরণ (1) পাওয়া যায়। এ কারণে সমীকরণদ্বয়ের লেখ পরস্পর সমাপতিত হয়েছে।

এখানে, $\left.\begin{array}{l}2x+y=3..........(1)\\4x+2y=6........(2)\end{array}\right\}$ সমীকরণজোটটি সমঞ্জস ও পরস্পর নির্ভরশীল। এরূপ সমীকরণজোটের অসংখ্যা সমাধান আছে এবং সমীকরণজোটটির লেখ একটি সরলরেখা।

এবার আমরা নিচের সমীকরণজোটটি সমাধান করার চেষ্টা করবো : $2x-y=4$..........(1)

$4x-2y=12$......(2)

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $y=2x-4$.

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও পাশের ছকটি তৈরি করি :

x	-1	0	4
y	-6	-4	4

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(-1,-6),(0,-4),(4,4)$ ।

আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই,

$4x-2y=12$, বা $2x-y=6$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

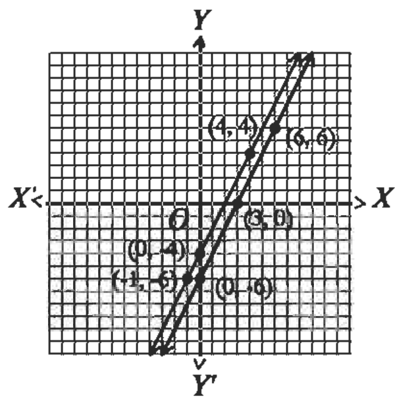
বা $y=2x-6$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও পাশের ছকটি তৈরি করি :

x	0	3	6
y	-6	0	6

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(0,-6),(3,0),(6,6)$ ।

মনে করি, ছক কাগজে XOX' ও YOY' যথাক্রমে x–অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু।



ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে সমীকরণ (1) হতে প্রাপ্ত $(-1,-6),(0,-4)$ ও $(4,4)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা।

আবার, সমীকরণ (2) হতে প্রাপ্ত $(0,-6),(3,0),(6,6)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও এদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরলরেখা।

চিত্রে লক্ষ করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের পৃথকভাবে প্রত্যেকটির অসংখ্য সমাধান থাকলেও জোট হিসেবে তাদের সাধারণ সমাধান নেই। আরও লক্ষ করি যে, প্রদত্ত সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র দুইটি পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা। অর্থাৎ, রেখা দুইটি কখনো একে অপরকে ছেদ করবে না। অতএব, এদের কোনো সাধারণ ছেদ বিন্দু পাওয়া যাবে না। এ ক্ষেত্রে আমরা বলি যে, এরূপ সমীকরণজোটের কোনো সমাধান নেই। আমরা জানি, এরূপ সমীকরণজোট অসমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল।

আমরা এখন লেখচিত্রের সাহায্যে সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল সমীকরণজোট সমাধান করবো।

দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল সরল সমীকরণের লেখ একটি বিন্দুতে ছেদ করে। ঐ ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা উভয় সমীকরণ সিদ্ধ হবে। ছেদবিন্দুটির স্থানাঙ্কই হবে সমীকরণদ্বয়ের সমাধান।

উদাহরণ ৭। সমাধান কর ও সমাধান লেখচিত্রে দেখাও : $2x+y=8$

$$3x-2y=5$$

সমাধান : : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $2x+y-8=0$...........(1)

$$3x-2y-5=0\text{.............}(2)$$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{1\times(-5)-(-2)\times(-8)}=\frac{y}{(-8)\times3-(-5)\times2}=\frac{1}{2(-2)-3\times1}$$

বা $\frac{x}{-5-16}=\frac{y}{-24+10}=\frac{1}{-4-3}$

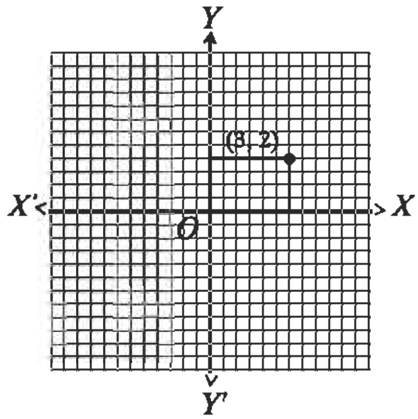
বা $\frac{x}{-21}=\frac{y}{-14}=\frac{1}{-7}$

বা $\frac{x}{21}=\frac{y}{14}=\frac{1}{7}$

$\therefore$ $\frac{x}{21}=\frac{1}{7}$, বা $x=\frac{21}{7}=3$

আবার, $\frac{y}{14}=\frac{1}{7}$, বা $y=\frac{14}{7}=2$

$\therefore$ সমাধান : $(x,y)=(3,2)$



মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি দুই বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(3,2)$ বিন্দুটি স্থাপন করি।

উদাহরণ ৮। লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর :

$$3x-y=3$$
$$5x+y=21$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $3x-y=3$..........(1)

$5x+y=21$........(2)

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $3x-y=3$, বা $y=3x-3$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও পাশের ছকটি তৈরি করি :

x	-1	0	3
y	-6	-3	6

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(-1,-6),(0,-3),(3,6)$,

আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই, $5x+y=21$, বা $y=21-5x$

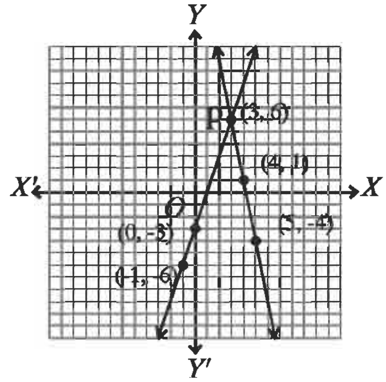
সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও পাশের ছকটি তৈরি করি :

x	3	4	5
y	6	1	-4

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(3,6),(4,1),(5,-4)$।

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু।

ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি।



এখন ছক কাগজে সমীকরণ (1) হতে প্রাপ্ত $(-1,-6),(0,-3),(3,6)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা।

একইভাবে, সমীকরণ (2) হতে প্রাপ্ত $(3,6),(4,1),(5,-4)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরলরেখা।

মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্র থেকে দেখা যায়, P বিন্দুর স্থানাংক $(3,6)$

$\therefore$ সমাধান : $(x,y)=(3,6)$

উদাহরণ ৯। লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান কর : $2x+5y=-14$

$4x-5y=17$

সমাধান : : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $2x+5y=-14$...........(1)

$4x-5y=17$........(2)

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $5y=-14-2x$, বা $y=\dfrac{-2x-14}{5}$

x	3	$\frac{1}{2}$	-2
y	-4	-3	-2

সমীকরণটিতে x এর সুবিধামত কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও পাশের ছকটি তৈরি করি :

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(3,-4),\left(\frac{1}{2},-3),(-2,-2)\right)$।

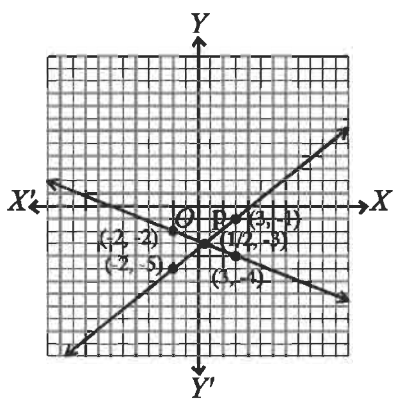
আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই, $5y=4x-17$, বা $y=\dfrac{4x-17}{5}$

x	3	$\frac{1}{2}$	-2
y	-1	-3	-5

সমীকরণটিতে x এর সুবিধামত কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও পাশের ছকটি তৈরি করি :

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(3,1),\left(\frac{1}{2},-3\right),(-2,-5)$

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু।



ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি দুই বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি।

এখন, ছক কাগজে সমীকরণ (1) থেকে প্রাপ্ত $(3,-4),\left(\frac{1}{2},-3\right)$ ও $(-2,-2)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে তাদের পরপর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা।

একইভাবে, সমীকরণ (2) থেকে প্রাপ্ত $(3,-1), \left(\frac{1}{2},-3\right), (-2,-5)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে তাদের পরপর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা।

মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্রে দেখা যায়, P বিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{1}{2},-3\right)$

$\therefore$ সমাধান : $(x,y)=\left(\frac{1}{2},-3\right)$

উদাহরণ ১০। লেখের সাহায্যে সমাধান কর : $3-\frac{3}{2}x=8-4x$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $3-\frac{3}{2}x=8-4x$

ধরি, $y=3-\frac{3}{2}x=8-4x$

$\therefore \quad y=3-\frac{3}{2}x$..........(1)

এবং $\quad y=8-4x$..........(2)

এখন, সমীকরণ (1) এ x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও পাশের ছকটি তৈরি করি :

x	-2	0	2
y	6	3	0

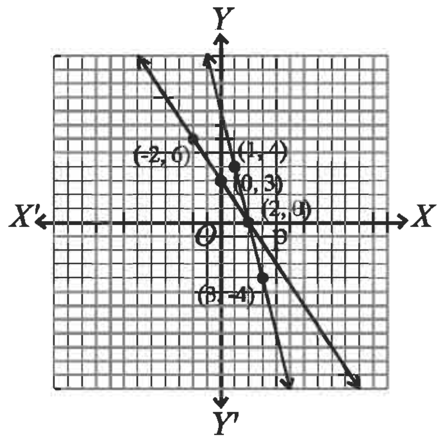
সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(-2,6),(0,3),(2,0)$

আবার, সমীকরণ (2) এ x-এর কয়েকটি মান নিয়ে y-এর অনুরূপ মান বের করি ও পাশের ছকটি তৈরি করি :

x	1	2	3
y	4	0	-4

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু $(1,4),(2,0),(3,-4)$

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি।



এখন, ছক কাগজে সমীকরণ (1) থেকে প্রাপ্ত $(-2,6),(0,3),(2,0)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরপর সংযুক্ত করি। তাহলে, লেখটি হবে একটি সরলরেখা। একইভাবে, সমীকরণ (2) থেকে প্রাপ্ত $(1,4),(2,0),(3,-4)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে এগুলো পরপর সংযুক্ত করি। তাহলে, লেখটি হবে একটি সরলরেখা। মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। চিত্রে দেখা যায়, ছেদবিন্দুটির স্থানাংক $(2,0)$ ।

$\therefore$ সমাধান : $x=2$, বা সমাধান : 2

> **কাজ** : $2x-y-3=0$ সমীকরণের লেখের উপর ছকের মাধ্যমে চারটি বিন্দু নির্ণয় কর। অত:পর ছক কাগজে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একক নিয়ে বিন্দুগুলো স্থাপন কর ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত কর। লেখটি কি সরলরেখা হয়েছে ?

অনুশীলনী ১২.৩

লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর :

১। $3x+4y=14$, $4x-3y=2$

২। $2x-y=1$, $5x+y=13$

৩। $2x+5y=1$, $x+3y=2$

৪। $3x-2y=2$, $5x-3y=5$

৫। $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2$, $2x+3y=13$

৬। $3x+y=6$, $5x+3y=12$

৭। $3x+2y=4$, $3x-4y=1$

৮। $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=3$, $x+\frac{y}{6}=3$

৯। $3x+2=x-2$

১০। $3x-7=3-2x$

১২.৫ বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সহসমীকরণ গঠন ও সমাধান

দৈনন্দিন জীবনে এমন কিছু গাণিতিক সমস্যা আছে যা সমীকরণ গঠনের মাধ্যমে সমাধান করা সহজতর হয়। এ জন্য সমস্যার শর্ত বা শর্তাবলি থেকে দুইটি অজ্ঞাত রাশির জন্য দুইটি গাণিতিক প্রতীক, প্রধানত চলক x, y ধরা হয়। অজ্ঞাত রাশি দুইটির মান নির্ণয়ের জন্য দুইটি সমীকরণ গঠন করতে হয়। গঠিত সমীকরণদ্বয় সমাধান করলেই অজ্ঞাত রাশি দুইটির মান পাওয়া যায়।

উদাহরণ ১১। দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সাথে 5 যোগ করলে যোগফল হবে সংখ্যাটির দশক স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ। আর সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে, তা মূল সংখ্যাটি থেকে 9 কম হবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, নির্ণেয় সংখ্যাটির দশক স্থানীয় অঙ্ক x এবং একক স্থানীয় অঙ্ক y। অতএব, সংখ্যাটি $10x+y$.

$\therefore$ ১ম শর্তানুসারে $x+y+5=3x$.........(1)

এবং ২য় শর্তানুসারে, $10y+x=(10x+y)-9$.......(2)

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $y=3x-x-5$, বা $y=2x-5$........(3)

আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই,

$10y-y+x-10x+9=0$

বা $9y-9x+9=0$

বা $y-x+1=0$

বা $2x-5-x+1=0$ [(3) হতে y-এর মান বসিয়ে]

বা $x=4$

(3) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$y=2\times4-5$

$=8-5$

$=3$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি হবে

$10x+y=10\times4+3$

$=40+3$

$=43$

$\therefore$ সংখ্যাটি 43

উদাহরণ ১২। আট বছর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের আটগুণ ছিল। দশ বছর পর পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হবে। বর্তমানে কার বয়স কত ?

সমাধান : মনে করি, বর্তমানে পিতার বয়স x বছর ও পুত্রের বয়স y বছর।

$\therefore$ ১ম শর্তানুসারে $x-8=8(y-8)$........(1)

এবং ২য় শর্তানুসারে, $x+10=2(y+10)$.......(2)

(1) হতে পাই, $x-8=8y-64$

বা $x=8y-64+8$

বা $x=8y-56$.............(3)

(2) হতে পাই, $x+10=2y+20$

বা $8y-56+10=2y+20$ [(3) হতে x এর মান বসিয়ে]

বা $8y-2y=20+56-10$

বা $6y=66$

বা $y=11$

$\therefore$ (3) হতে পাই, $x=8\times11-56=88-56=32$

$\therefore$ বর্তমানে পিতার বয়স 32 বছর ও পুত্রের বয়স 11 বছর।

উদাহরণ ১৩। একটি আয়তাকার বাগানের প্রস্থের দ্বিগুণ, দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 10 মিটার বেশি এবং বাগানটির পরিসীমা 100 মিটার।

ক. বাগানটির দৈর্ঘ্য x মি ও প্রস্থ y মি. ধরে সমীকরণজোট গঠন কর।

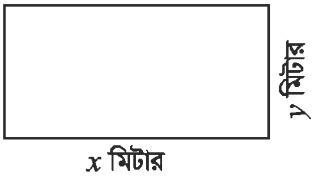
খ. বাগানটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

গ. বাগানটির সীমানার বাইরে চারদিকে 2 মিটার চওড়া রাস্তা আছে। রাস্তাটি ইট দিয়ে তৈরি করতে প্রতিবর্গমিটারে $110\cdot00$ টাকা হিসেবে মোট কত খরচ হবে ?

সমাধান : ক. আয়তাকার বাগানটির দৈর্ঘ্য x মিটার ও প্রস্থ y মিটার।

$\therefore$ ১ম শর্তানুসারে $2y=x+10$........(1)

এবং ২য় শর্তানুসারে, $2(x+y)=100$.......(2)



খ. সমীকরণ (1) হতে পাই, $2y=x+10$........(1)

সমীকরণ (2) হতে পাই, $2x+2y=100$.......(2)

বা $2x+x+10=100$ [(1) হতে $2y$ এর মান বসিয়ে]

বা $3x=90$ বা $x=30$

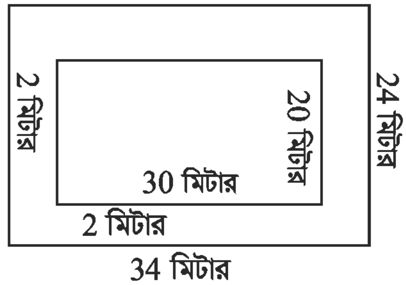
$\therefore$ (1) হতে পাই, $2y=30+10$ [x এর মান বসিয়ে]

বা, $2y=40$ বা, $y=20$

$\therefore$ বাগানটির দৈর্ঘ্য 30 মিটার ও প্রস্থ 20 মিটার।

গ. রাস্তার বাইরের দৈর্ঘ্য $(30+4)$ মি.= 34 মি

এবং প্রস্থ = $(20+4)$ মি. = 24 মি.



$\therefore$ রাস্তার ক্ষেত্রফল = রাস্তাসহ বাগানের ক্ষেত্রফল – বাগানের ক্ষেত্রফল

$= (34\times 24 - 30\times 20)$ বর্গমিটার।

$= (816-600)$ বর্গমিটার

$= 216$ বর্গমিটার।

$\therefore$ ইট দিয়ে রাস্তা তৈরি করার খরচ

$= 216\times 110$ টাকা

$= 23760$ টাকা।

কাজ : ABC ত্রিভুজে $\angle B = 2x$ ডিগ্রি, $\angle C = x$ ডিগ্রি, $\angle A = y$ ডিগ্রি এবং $\angle A = \angle B + \angle C$ হলে, x ও y এর মান নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ১২·৪

১। নিচের কোন শর্তে $ax+by+c=0$ ও $px+qy+r=0$ সমীকরণজোটটি সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল হবে ?

ক. $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$ খ. $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ গ. $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$ ঘ. $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$

২। $x+y=4, x-y=2$ হলে (x, y) এর মান নিচের কোনটি ?

ক. $(2, 4)$ খ. $(4, 2)$ গ. (3.1) ঘ. $(1, 3)$

৩। $x+y=6$ ও $2x=4$ হলে, y মান কত ?

ক. 2 খ. 4 গ. 6 ঘ. 8

৪। নিচের কোনটির জন্য পাশের ছকটি সঠিক ?

x	0	2	4
y	-4	0	4

ক. $y=x-4$ খ. $y=8-x$ গ. $y=4-2x$ ঘ. $y=2x-4$

৫। $2x-y=8$ এবং $x-2y=4$ হলে, $x+y$ = কত ?

ক. 0 খ. 4 গ. 8 ঘ. 12

৬। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

$i.\ 2x-y=0$ ও $x-2y=0$ সমীকরণদ্বয় পরস্পর নির্ভরশীল।

$ii.\ x-2y+3=0$ সমীকরণের লেখচিত্র $(-3,0)$ বিন্দুগামী।

$iii.\ 3x+4y=1$ সমীকরণের লেখচিত্র একটি সরলরেখা।

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

৭। আয়তাকার একটি ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ অপেক্ষা 2 মিটার বেশি এবং মেঝের পরিসীমা 20 মিটার।

নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

(১) ঘরটির মেঝের দৈর্ঘ্য কত মিটার ?

ক. 10 খ. 8 গ. 6 ঘ. 4

(২) ঘরটির মেঝের ক্ষেত্রফল কত বর্গমিটার ?

ক. 24 খ. 32 গ. 48 ঘ. 80

(৩) ঘরটির মেঝে মোজাইক করতে প্রতি বর্গমিটারে 900 টাকা হিসেবে মোট কত খরচ হবে ?

ক. 72000 খ. 43200 গ. 28800 ঘ. 21600

সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান কর (৮ – ১৭) :

৮। কোনো ভগ্নাংশের লব ও হরের প্রত্যেকটির সাথে 1 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{4}{5}$ হবে। আবার, লব ও হরের প্রত্যেকটি থেকে 5 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হবে। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

৯। কোনো ভগ্নাংশের লব থেকে 1 বিয়োগ ও হরের সাথে 2 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হয়। আর লব থেকে 7 বিয়োগ এবং হর থেকে 2 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{3}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

১০। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক দশক স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ অপেক্ষা 1 বেশি। কিন্তু অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তা অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির আটগুণের সমান। সংখ্যাটি কত ?

১১। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের অন্তর 4; সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তার ও মূল সংখ্যাটির যোগফল 110 ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

১২। মাতার বর্তমান বয়স তার দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির চারগুণ। 5 বছর পর মাতার বয়স ঐ দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির দ্বিগুণ হবে। মাতার বর্তমান বয়স কত ?

১৩। একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 5 মিটার কম ও প্রস্থ 3 মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল 9 বর্গমিটার কম হবে। আবার দৈর্ঘ্য 3 মিটার বেশি ও প্রস্থ 2 মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল 67 বর্গমিটার বেশি হবে। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

১৪। একটি নৌকা দাঁড় বেয়ে স্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় 15 কি.মি. যায় এবং স্রোতের প্রতিকূলে যায় ঘণ্টায় 5 কি.মি.। নৌকার ও স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

১৫। একজন গার্মেন্টস শ্রমিক মাসিক বেতনে চাকরি করেন। প্রতিবছর শেষে একটি নির্দিষ্ট বেতনবৃদ্ধি পান। তার মাসিক বেতন 4 বছর পর 4500 টাকা ও 8 বছর পর 5000 টাকা হয়। তার চাকরি শুরুর বেতন ও বার্ষিক বেতন বৃদ্ধির পরিমাণ নির্ণয় কর।

১৬। একটি সরল সমীকরণজোট $x+y=10$

$3x-2y=0$

ক. দেখাও যে, সমীকরণজোটটি সমঞ্জস। এর কয়টি সমাধান আছে ?

খ. সমীকরণজোটটি সমাধান করে (x, y) নির্ণয় কর।

গ. সমীকরণদ্বয় দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখাদ্বয় x–অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১৭। কোনো ভগ্নাংশের লবের সাথে 7 যোগ করলে ভগ্নাংশটির মান পূর্ণসংখ্যা 2 হয়। আবার হর হতে 2 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটির মান পূর্ণসংখ্যা 1 হয়।

ক. ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$ ধরে সমীকরণজোট গঠন কর।

খ. সমীকরণজোটটি আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান করে (x, y) নির্ণয় কর। ভগ্নাংশটি কত ?

গ. সমীকরণজোটটির লেখ অঙ্কন করে (x, y) এর প্রাপ্ত মানের সত্যতা যাচাই কর।

ত্রয়োদশ অধ্যায়

সসীম ধারা
(Finite Series)

প্রাত্যহিক জীবনে 'ক্রম' বহুল প্রচলিত একটি শব্দ। যেমন– দোকানের তাকে ভোগ্যপণ্য সাজাতে, নাটক ও অনুষ্ঠানের ঘটনাবলী সাজাতে, গুদামঘরে সুন্দরভাবে দ্রব্যাদি রাখতে ক্রমের ধারণা ব্যবহৃত হয়। আবার অনেক কাজ সহজে এবং দৃষ্টিনন্দনভাবে সম্পাদন করতে আমরা বড় হতে ছোট, শিশু হতে বৃদ্ধ, হালকা হতে ভারী ইত্যাদি ধরনের ক্রম ব্যবহার করি। এই ক্রমের ধারণা হতেই বিভিন্ন প্রকার গাণিতিক ধারার উদ্ভব হয়েছে। এই অধ্যায়ে অনুক্রম ও ধারার মধ্যে সম্পর্ক ও এতদসংক্রান্ত বিষয়বস্তু উপস্থাপন করা হয়েছে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- অনুক্রম ও ধারা বর্ণনা করতে ও তাদের পার্থক্য নিরূপণ করতে পারবে।
- সমান্তর ধারা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সমান্তর ধারার নির্দিষ্টতম পদ ও নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র গঠন করতে পারবে এবং সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের ও ঘনের সমষ্টি নির্ণয় করতে পারবে।
- ধারার বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।
- গুণোত্তর ধারার নির্দিষ্টতম পদ ও নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র গঠন করতে পারবে এবং সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

অনুক্রম

নিচের সম্পর্কটি লক্ষ করি :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots\cdots\cdots & n & \cdots\cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots\cdots\cdots & 2n & \cdots\cdots \end{array}$$

এখানে প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যা n তার দ্বিগুণ সংখ্যা $2n$ এর সাথে সম্পর্কিত। অর্থাৎ স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$ থেকে একটি নিয়মের মাধ্যমে যোগবোধক জোড় সংখ্যার সেট $\{2, 4, 6, 8, \ldots\ldots\}$ পাওয়া যায়। এই সাজানো জোড়সংখ্যার সেটটি একটি অনুক্রম। সুতরাং, কতকগুলো রাশিকে একটা বিশেষ নিয়মে ক্রমান্বয়ে এমনভাবে সাজানো হয় যে প্রত্যেক রাশি তার পূর্বের পদ ও পরের পদের সাথে কীভাবে সম্পর্কিত তা জানা যায়। এভাবে সাজানো রাশিগুলোর সেটকে অনুক্রম (Sequence) বলা হয়।

উপরের সম্পর্কটিকে ফাংশন বলে এবং $f(n)=2n$ লিখা হয়। এই অনুক্রমের সাধারণ পদ $2n$. যেকোনো অনুক্রমের পদসংখ্যা অসীম। অনুক্রমটি সাধারণ পদের সাহায্যে লিখার পদ্ধতি হলো $\{2n\}, n=1,2,3,.........$.. বা, $\{2n\}_{n=1}^{+\infty}$ বা, $\{2n\}$.

অনুক্রমের প্রথম রাশিকে প্রথম পদ, দ্বিতীয় রাশিকে দ্বিতীয় পদ, তৃতীয় রাশিকে তৃতীয় পদ ইত্যাদি বলা হয়। 1, 3, 5, 7,... ... অনুক্রমের প্রথম পদ $=1$, দ্বিতীয় পদ = 3, ইত্যাদি।

নিচে অনুক্রমের চারটি উদাহরণ দেওয়া হলো :

$1, \quad 2, \quad 3, ... \quad ,n, ...$

$1, \quad 3, \quad 5, ... \quad ,(2n-1), ...$

$1, \quad 4, \quad 9, ... \quad ,n^2, ...$

$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, ... \quad ,\frac{n}{n+1}, ...$

কাজ : ১। নিচে ছয়টি অনুক্রমের সাধারণ পদ দেওয়া আছে। অনুক্রমগুলি লিখ :

$(i)\ \frac{1}{n} \quad (ii)\ \frac{n-1}{n+1} \quad (iii)\ \frac{1}{2^n} \quad (iv)\ \frac{1}{2^{n-1}} \quad (v)\ (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1} \quad (vi)\ (-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}$.

২। তোমরা প্রত্যেকে একটি করে অনুক্রমের সাধারণ পদ লিখে অনুক্রমটি লিখ।

ধারা

কোনো অনুক্রমের পদগুলো পরপর '+' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করলে একটি ধারা (Series) পাওয়া যায়। যেমন, $1+3+5+7+.......$ একটি ধারা। ধারাটির পরপর দুইটি পদের পার্থক্য সমান। আবার $2+4+8+16+........$একটি ধারা। এর পরপর দুইটি পদের অনুপাত সমান। সুতরাং, যেকোনো ধারার পরপর দুইটি পদের মধ্যে সম্পর্কের উপর নির্ভর করে ধারাটির বৈশিষ্ট্য। ধারাগুলোর মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ দুইটি ধারা হলো সমান্তর ধারা ও গুণোত্তর ধারা।

সমান্তর ধারা

কোনো ধারার যেকোনো পদ ও তার পূর্ববর্তী পদের পার্থক্য সব সময় সমান হলে, সেই ধারাটিকে সমান্তর ধারা বলে।

উদাহরণ : $1+3+5+7+9+11$ একটি ধারা।

এই ধারাটির প্রথম পদ 1, দ্বিতীয় পদ 3, তৃতীয় পদ 5, ইত্যাদি।

এখানে, দ্বিতীয় পদ – প্রথম পদ = $3-1=2$, তৃতীয় পদ – দ্বিতীয় পদ = $5-3=2$,

চতুর্থ পদ – তৃতীয় পদ = $7-5=2$, পঞ্চম পদ – চতুর্থ পদ = $9-7=2$,

ষষ্ঠ পদ – পঞ্চম পদ $=11-9=2$

সুতরাং, ধারাটি একটি সমান্তর ধারা।

এই ধারায় প্রাপ্ত দুইটি পদের বিয়োগফলকে সাধারণ অন্তর বলা হয়। উলিখিত ধারার সাধারণ অন্তর 2. ধারাটির পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট। এ জন্য এটি একটি সসীম বা সান্তধারা (Finite Series)। উলেখ্য, সমান্তর ধারার পদসংখ্যা নির্দিষ্ট না হলে তাকে অসীম বা অনন্তধারা (Infinite Series) বলে। যেমন, $1+4+7+10+\ldots\ldots$ একটি অসীম ধারা। সমান্তর ধারায় সাধারণত প্রথম পদকে a দ্বারা এবং সাধারণ অন্তরকে d দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তাহলে সংজ্ঞানুসারে, প্রথম পদ a হলে, দ্বিতীয় পদ $a+d$, তৃতীয় পদ $a+2d$, ইত্যাদি। সুতরাং, ধারাটি হবে, $a+(a+d)+(a+2d)+\ldots\ldots$

সমান্তর ধারার সাধারণ পদ নির্ণয়

মনে করি, যেকোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ $=a$ ও সাধারণ অন্তর $=d$; তাহলে ধারাটির

প্রথম পদ $=a \quad = a+(1-1)\,d$

দ্বিতীয় পদ $=a+d \quad = a+(2-1)\,d$

তৃতীয় পদ $=a+2d \quad = a+(3-1)\,d$

চতুর্থ পদ $=a+3d \quad = a+(4-1)\,d$

....

....

$\therefore$ nতম পদ $= a+(n-1)d$

এই nতম পদকেই সমান্তর ধারার সাধারণ পদ বলা হয়। কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর d জানা থাকলে nতম পদে $n=1,2,3,4,\ldots\ldots$ বসিয়ে পর্যায়ক্রমে ধারাটির প্রত্যেকটি পদ নির্ণয় করা যায়।

মনে করি, একটি সমান্তর ধারার প্রথম পদ 3 এবং সাধারণ অন্তর 2।

অতএব, ধারাটির nতম পদ $=3+(n-1)\times 2 = 2n+1$.

কাজ : কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ 5 এবং সাধারণ অন্তর 7 হলে, ধারাটির প্রথম ছয়টি পদ, 22তম পদ, r তম পদ এবং $(2p+1)$তম পদ নির্ণয় কর।

উদাহরণ ১। $5+8+11+14+\cdots\cdots$ ধারাটির কোন পদ 383 ?

সমাধান : ধারাটির প্রথম পদ $a=5$, সাধারণ অন্তর $d=8-5=11-8=3=14-11=3$

ধারাটি একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির nতম পদ = 383

আমরা জানি, nতম পদ = $a+(n-1)d$.

$\therefore \quad a+(n-1)d=383$

বা, $5+(n-1)3=383$

বা, $5+3n-3=383$

বা, $3n=383-5+3$

বা, $3n=381$

বা, $n=\dfrac{381}{3}$

$\therefore \quad n=127$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারার 127 তম পদ = 383.

সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি

মনে করি, যেকোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a , শেষ পদ p, সাধারণ অন্তর d, পদ সংখ্যা n এবং ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n.

ধারাটিকে প্রথম পদ হতে শেষ পদ পর্যন্ত এবং বিপরীতক্রমে শেষ পদ হতে প্রথম পদ পর্যন্ত লিখে পাওয়া যায়

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots \cdots + (p-2d) + (p-d) + p \qquad (i)$$

এবং $$S_n = p + (p-d) + (p-2d) + \cdots \cdots + (a+2d) + (a+d) + a \qquad (ii)$$

যোগ করে, $2S_n = (a+p) + (a+p) + (a+p) + \ldots\ldots + (a+p) + (a+p) + (a+p)$

বা, $2S_n = n(a+p)$ [$\because$ ধারাটির পদ সংখ্যা n]

$$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}(a+p) \qquad (iii)$$

আবার, n তম পদ $= p = a + (n-1)d$. p এর মান (iii) এ বসিয়ে পাই,

$$S_n = \frac{n}{2}[a + \{a + (n-1)d\}]$$

অর্থাৎ, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$ .... (iv)

কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a, শেষ পদ p এবং পদ সংখ্যা n জানা থাকলে, (iii) নং সূত্রের সাহায্যে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করা যায়। কিন্তু প্রথম পদ a , সাধারণ অন্তর d, পদ সংখ্যা n জানা থাকলে, (iv) নং সূত্রের সাহায্যে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করা যায়।

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয়

মনে করি, n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি S_n

অর্থাৎ, $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots \cdots \cdots + (n-1) + n \qquad (i)$

ধারাটিকে প্রথম পদ হতে শেষ পদ পর্যন্ত এবং বিপরীতক্রমে শেষ পদ হতে প্রথম পদ পর্যন্ত লিখে পাওয়া যায়

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots \cdots \cdots + (n-2) + (n-1) + n \qquad (i)$$

এবং $$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots \cdots + 3 \quad + 2 \quad + 1 \qquad (ii)$$

যোগ করে, $2S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots \cdots \cdots + (n+1)$ [n সংখ্যক পদ]

বা, $2S_n = n(n+1)$

$$\therefore \; S_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (iii)$$

উদাহরণ ২। প্রথম 50 টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা (iii) নং সূত্র ব্যবহার করে পাই,

$$S_{50} = \frac{50(50+1)}{2} = 25 \times 51 = 1275$$

$\therefore$ প্রথম 50 টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল 1275.

উদাহরণ ৩। $1+2+3+4+\cdots\cdots\cdots+99=$ কত ?

সমাধান : ধারাটির প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অন্তর $d=2-1=1$ এবং শেষ পদ $p=99$.

ধারাটি একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ $= 99$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n তম পদ $= a+(n-1)d$

$\therefore \quad a+(n-1)d=99$

বা, $\quad 1+(n-1)1=99$

বা, $\quad 1+n-1=99$

$\therefore \quad n=99$

বিকল্প পদ্ধতি:

যেহেতু

$$S_n=\frac{n}{2}(a+p),$$

$$\therefore S_{99}=\frac{99}{2}(1+99)$$

$$=\frac{99\times100}{2}=4950$$

(iv) নং সূত্র হতে, সমান্তর ধারার প্রথম n–সংখ্যক পদের সমষ্টি–

$$S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}.$$

সুতরাং, ধারাটির 99 টি পদের সমষ্টি $S_{99}=\frac{99}{2}\{2\times1+(99-1)\times1\}=\frac{99}{2}(2+98)$

$$=\frac{99\times100}{2}=99\times50=4950$$

উদাহরণ ৪। $7+12+17+\cdots\cdots\cdots$ ধারাটির 30 টি পদের সমষ্টি কত ?

সমাধান : ধারাটি প্রথম পদ $a=7$, সাধারণ অন্তর $d=12-7=5$

ধারাটি একটি সমান্তর ধারা। এখানে পদ সংখ্যা $n=30$.

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম n–সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$$S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}.$$

তাহলে, 30 টি পদের সমষ্টি $S_{30}=\frac{30}{2}\{2.7+(30-1)5\}=15(14+29\times5)$

$$=15(14+145)=15\times159$$

$$=2385$$

উদাহরণ ৫। ক তার বেতন থেকে প্রথম মাসে 1200 টাকা সঞ্চয় করেন এবং পরবর্তী মাসগুলোর প্রতিমাসে এর পূর্ববর্তী মাসের তুলনায় 100 টাকা বেশি সঞ্চয় করেন।

(i) তিনি n তম মাসে কত টাকা সঞ্চয় করেন ?

(ii) উপরোক্ত সমস্যাটিকে n সংখ্যক পদ পর্যন্ত ধারায় প্রকাশ কর।

(iii) তিনি প্রথম n সংখ্যক মাসে কত টাকা সঞ্চয় করেন ?

(iv) এক বছরে তিনি কত টাকা সঞ্চয় করেন ?

সমাধান : (i) প্রথম মাসে সঞ্চয় করেন 1200 টাকা

দ্বিতীয় মাসে সঞ্চয় করেন $(1200+100)$ টাকা $=1300$ টাকা

তৃতীয় মাসে সঞ্চয় করেন $(1300+100)$ টাকা $=1400$ টাকা

চতুর্থ মাসে সঞ্চয় করেন $(1400+100)$ টাকা $=1500$ টাকা

সুতরাং, এটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ $a=1200$, সাধারণ অন্তর $d=1300-1200=100.$

ধারাটির n তম পদ $=a+(n-1)d$

$=1200+(n-1)100=1200+100n-100$

$=100n+1100$

অতএব, তিনি n তম মাসে সঞ্চয় করেন $(100n+1100)$ টাকা।

(ii) এক্ষেত্রে n সংখ্যক পদ পর্যন্তধারাটি হবে $1200+1300+1400+\cdots\cdots\cdots+(100n+1100)$

(iii) তিনি প্রথম n সংখ্যক মাসে সঞ্চয় করেন–

$\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$ টাকা $=\frac{n}{2}\{2\times1200+(n-1)100\}$ টাকা

$=\frac{n}{2}(2400+100n-100)$ টাকা $=\frac{n}{2}\times2(1150+50n)$ টাকা

$=n(50n+1150)$ টাকা।

(iv) আমরা জানি, এক বছর = 12 মাস। এক্ষেত্রে, $n=12.$

অতএব, [উপরের (iii) হতে] ক এক বছরে সঞ্চয় করেন $12(50\times12+1150)$ টাকা

$=12(600+1150)$ টাকা $=12\times1750$ টাকা = 21000 টাকা।

অনুশীলনী ১৩.১

১। $2-5-12-19-\cdots\cdots\cdots$ ধারাটির সাধারণ অন্তর এবং 12তম পদ নির্ণয় কর।

২। $8+11+14+17+\cdots\cdots\cdots$ ধারাটির কোন পদ 392 ?

৩। $4+7+10+13+\cdots\cdots\cdots$ ধারাটির কোন পদ 301 ?

৪। কোনো সমান্তর ধারার p তম পদ p^2 এবং q তম পদ q^2 হলে, ধারাটির $(p+q)$ তম পদ কত ?

৫। কোনো সমান্তর ধারার m তম পদ n ও n তম পদ m হলে, $(m+n)$ তম পদ কত ?

৬। $1+3+5+7+\cdots\cdots\cdots$ ধারাটির n পদের সমষ্টি কত ?

৭। $8+16+24+\cdots\cdots\cdots$ ধারাটির প্রথম 9 টি পদের সমষ্টি কত ?

৮। $5+11+17+23+\cdots\cdots\cdots+59=$ কত ?

৯। $29+25+21+\cdots\cdots\cdots-23=$ কত ?

১০। কোনো সমান্তর ধারার 12 তম পদ 77 হলে, এর প্রথম 23 টি পদের সমষ্টি কত ?

১১। একটি সমান্তর ধারার 16 তম পদ -20 হলে, এর প্রথম 31 টি পদের সমষ্টি কত ?

১২। $9+7+5+\cdots\cdots\cdots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল -144 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

১৩। $2+4+6+8+\cdots\cdots\cdots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 2550 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

১৪। কোনো ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $n(n+1)$ হলে, ধারাটি নির্ণয় কর।

১৫। কোনো ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $n(n+1)$ হলে, ধারাটির 10 টি পদের সমষ্টি কত ?

১৬। একটি সমান্তর ধারার প্রথম 12 পদের সমষ্টি 144 এবং প্রথম 20 পদের সমষ্টি 560 হলে, এর প্রথম 6 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৭। কোনো সমান্তর ধারার প্রথম m পদের সমষ্টি n এবং প্রথম n পদের সমষ্টি m হলে, এর প্রথম $(m+n)$ পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৮। কোনো সমান্তর ধারায় p তম, q তম ও r তম পদ যথাক্রমে a, b, c হলে, দেখাও যে,

$$a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0.$$

১৯। দেখাও যে, $1+3+5+7+\cdots\cdots\cdots+125=169+171+173+\cdots\cdots\cdots+209.$

২০। এক ব্যক্তি 2500 টাকার একটি ঋণ কিছুসংখ্যক কিস্তিতে পরিশোধ করতে রাজী হন। প্রত্যেক কিস্তি পূর্বের কিস্তি থেকে 2 টাকা বেশি। যদি প্রথম কিস্তি 1 টাকা হয়, তবে কতগুলো কিস্তিতে ঐ ব্যক্তি তার ঋণ শোধ করতে পারবেন ?

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয়

মনে করি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি S_n.

অর্থাৎ, $S_n = 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2$

আমরা জানি,

$$r^3-3r^2+3r-1=(r-1)^3$$

বা, $r^3-(r-1)^3=3r^2-3r+1$

উপরের অভেদটিতে, $r=1, 2, 3, \ldots\ldots, n$ বসিয়ে পাই,

$$1^3-0^3=3.1^2-3.1+1$$
$$2^3-1^3=3.2^2-3.2+1$$
$$3^3-2^3=3.3^2-3.3+1$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$n^3-(n-1)^3=3.n^2-3.n+1$$

যোগ করে পাই,

$$n^3-0^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2)-3(1+2+3+\cdots\cdots\cdots+n)+(1+1+1+\cdots\cdots+1)$$

বা, $n^3=3S_n-3.\dfrac{n(n+1)}{2}+n \quad \left[\because 1+2+3+\cdots\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}\right]$

বা, $3S_n=n^3+\dfrac{3n(n+1)}{2}-n$

$$= \frac{2n^3+3n^2+3n-2n}{2} = \frac{2n^3+3n^2+n}{2} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(2n^2+2n+n+1)}{2} = \frac{n\{2n(n+1)+1(n+1)\}}{2}$$

বা, $3S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

$\therefore \quad S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি নির্ণয়

মনে করি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি S_n.

অর্থাৎ, $S_n = 1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots\cdots+n^3$

আমরা জানি, $(r+1)^2-(r-1)^2 = (r^2+2r+1)-(r^2-2r+1) = 4r.$

বা, $(r+1)^2r^2 - r^2(r-1)^2 = 4r.r^2 = 4r^3$ [উভয়পক্ষকে r^2 দ্বারা গুণ করে]

উপরের অভেদটিতে, $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$ বসিয়ে পাই,

$2^2.1^2 - 1^2.0^2 = 4.1^3$

$3^2.2^2 - 2^2.1^2 = 4.2^3$

$4^2.3^2 - 3^2.3^2 = 4.3^3$

… … … …

… … … …

$(n+1)^2n^2 - n^2(n-1)^2 = 4n^3$

যোগ করে, $(n+1)^2.n^2 - 1^2.0^2 = 4(1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots\cdots+n^3)$

বা, $(n+1)^2.n^2 = 4S_n$

বা, $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\therefore \quad S_n = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

প্রয়োজনীয় সূত্র

$$1+2+3+\cdots\cdots\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots\cdots+n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য: $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots\cdots\cdots+n)^2$.

কাজ : ১। প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় কর।
২। প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গুণোত্তর ধারা

কোনো ধারার যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সব সময় সমান হলে অর্থাৎ, যেকোনো পদকে এর পূর্ববর্তী পদ দ্বারা ভাগ করে ভাগফল সর্বদা সমান পাওয়া গেলে, সে ধারাটিকে গুণোত্তর ধারা বলে এবং ভাগফলকে সাধারণ অনুপাত বলে। যেমন, $2+4+8+16+32$ ধারাটির প্রথম পদ 2, দ্বিতীয় পদ 4, তৃতীয় পদ 8, চতুর্থ পদ 16, পঞ্চম পদ 32. এখানে,

দ্বিতীয় পদের সাথে প্রথম পদের অনুপাত = $\frac{4}{2}=2$, তৃতীয় পদের সাথে দ্বিতীয় পদের অনুপাত = $\frac{8}{4}=2$

চতুর্থ পদের সাথে তৃতীয় পদের অনুপাত = $\frac{16}{8}=2$, পঞ্চম পদের সাথে চতুর্থ পদের অনুপাত = $\frac{32}{16}=2$.

সুতরাং, ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা। এই ধারায় যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সর্বদা সমান। উলিখিত ধারায় সাধারণ অনুপাত 2। ধারাটির পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট। এ জন্য এটি একটি গুণোত্তর সসীম ধারা।

ভৌত ও জীব বিজ্ঞানের বিভিন্ন ক্ষেত্রে, ব্যাংক ও বীমা ইত্যাদি প্রতিষ্ঠানে এবং বিভিন্ন প্রকার প্রযুক্তিবিদ্যায় গুণোত্তর ধারার ব্যাপক প্রয়োগ আছে।

গুণোত্তর ধারার পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট না থাকলে একে অনন্ত গুণোত্তর ধারা বলে।

গুণোত্তর ধারার প্রথম পদকে সাধারণত a দ্বারা এবং সাধারণ অনুপাতকে r দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তাহলে সংজ্ঞানুসারে, প্রথম পদ a হলে, দ্বিতীয় পদ ar, তৃতীয় পদ ar^2, ইত্যাদি। সুতরাং, ধারাটি হবে,

$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots\cdots$

কাজ : নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে গুণোত্তর ধারাগুলো লিখ :

(*i*) প্রথম পদ 4, সাধারণ অনুপাত 10 (*ii*) প্রথম পদ 9, সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{3}$ (*iii*) প্রথম পদ 7, সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{10}$ (*iv*) প্রথম পদ 3, সাধারণ অনুপাত 1 (*v*) প্রথম পদ 1, সাধারণ অনুপাত $-\frac{1}{2}$ (*vi*) প্রথম পদ 3, সাধারণ অনুপাত -1.

গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ

মনে করি, যেকোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, তাহলে ধারাটির

প্রথম পদ $=a=ar^{1-1}$ দ্বিতীয় পদ $=ar=ar^{2-1}$

তৃতীয় পদ $=ar^2=ar^{3-1}$ চতুর্থ পদ $=ar^3=ar^{4-1}$

… … … … … …

… … … … … …

nতম পদ = ar^{n-1}

এই n তম পদকেই গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ বলা হয়। কোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a ও সাধারণ অনুপাত r জানা থাকলে n তম পদে পর্যায়ক্রমে $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ ইত্যাদি বসিয়ে ধারাটির যেকোনো পদ নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ ৬। $2+4+8+16+\cdots\cdots$ ধারাটির 10 তম পদ কত ?

সমাধান : ধারাটির প্রথম পদ $a = 2$, সাধারণ অনুপাত $r = \dfrac{4}{2} = 2.$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore$ ধারাটির 10 তম পদ $= 2 \times 2^{10-1}$

$= 2 \times 2^9 = 1024$

উদারহণ ৭। $128 + 64 + 32 + \cdots\cdots\cdots$ ধারাটির সাধারণ পদ কত ?

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $a = 128$, সাধারণ অনুপাত $r = \dfrac{64}{128} = \dfrac{1}{2}.$

ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ $= ar^{n-1}$

সুতরাং, ধারাটির সাধারণ পদ $= 128 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{2^7}{2^{n-1}} = \dfrac{1}{2^{n-1-7}} = \dfrac{1}{2^{n-8}}.$

উদাহরণ ৮। একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম ও দ্বিতীয় পদ যথাক্রমে 27 এবং 9 হলে, ধারাটির পঞ্চম পদ এবং দশম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $a = 27$, দ্বিতীয় পদ $= 9$

তাহলে সাধারণ অনুপাত $r = \dfrac{9}{27} = \dfrac{1}{3}.$

$\therefore$ পঞ্চম পদ $= ar^{5-1} = 27 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = \dfrac{27 \times 1}{27 \times 3} = \dfrac{1}{3}$

এবং দশম পদ $= ar^{10-1} = 27 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^9 = \dfrac{3^3}{3^3 \times 3^6} = \dfrac{1}{3^6} = \dfrac{1}{729}.$

গুণোত্তর ধারার সমষ্টি নির্ণয়

মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r এবং পদ সংখ্যা n. যদি n সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n হয়, তাহলে

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots\cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad (i)$$

এবং $r.S_n = \quad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots\cdots\cdots + ar^{n-1} + ar^n$ [(i) কে r দ্বারা গুণ করে] (ii)

বিয়োগ করে, $S_n - rS_n = a - ar^n$

বা, $S_n(1-r) = a(1-r^n)$

$\therefore \quad S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$, যখন $r < 1$

আবার (ii) থেকে (i) বিয়োগ করে পাই,

$rS_n - S_n = ar^n - a$ বা, $S_n(r-1) = a(r^n - 1)$

অর্থাৎ, $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$, যখন $r > 1$.

লক্ষণীয় : সাধারণ অনুপাত $r = 1$ হলে প্রত্যেক পদ $= a$

সুতরাং, এক্ষেত্রে $S_n = a + a + a + \cdots \cdots n$ পদ পর্যন্ত

$= an.$

> **কাজ :** ক তার ছেলেকে স্কুলে নেয়া–আনার জন্য এক ব্যক্তিকে ১লা এপ্রিল থেকে এক মাসের জন্য নিয়োগ করলেন। তার পারিশ্রমিক ঠিক করা হলো– প্রথম দিন এক পয়সা, দ্বিতীয় দিন প্রথম দিনের দ্বিগুণ অর্থাৎ দুই পয়সা, তৃতীয় দিন দ্বিতীয় দিনের দ্বিগুণ অর্থাৎ চার পয়সা। এই নিয়মে পারিশ্রমিক দিলে সাপ্তাহিক ছুটির দিনসহ এক মাস পর ঐ ব্যক্তি কত টাকা পাবেন ?

উদাহরণ ৯। $12 + 24 + 48 + \cdots \cdots \cdots + 768$ ধারাটির সমষ্টি কত ?

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $a = 12$, সাধারণ অনুপাত $r = \dfrac{24}{12} = 2 > 1.$

$\therefore$ ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির nতম পদ $= 768$

আমরা জানি, nতম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore \quad ar^{n-1} = 768$

বা, $\quad 12 \times 2^{n-1} = 768$

বা, $\quad 2^{n-1} = \dfrac{768}{12} = 64$

বা, $\quad 2^{n-1} = 2^6$

বা, $\quad n - 1 = 6$

$\therefore \quad n = 7.$

সুতরাং, ধারাটির সমষ্টি $= \dfrac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$, যখন $r > 1$

$= \dfrac{12(2^7 - 1)}{2-1} = 12 \times (128 - 1) = 12 \times 127 = 1524.$

উদাহরণ ১০। $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots \cdots \cdots$ ধারাটির প্রথম আটটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $a = 1$, সাধারণ অনুপাত $r = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2} < 1$

ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

এখানে পদ সংখ্যা $n = 8.$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n –সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \qquad \text{যখন } r < 1.$$

সুতরাং, ধারাটির প্রথম 8টি পদের সমষ্টি $S_8 = \dfrac{1 \times \left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1-\dfrac{1}{256}}{\dfrac{1}{2}}$

$$= 2\left(\frac{256-1}{256}\right) = \frac{255}{128} = 1\frac{127}{128}$$

অনুশীলনী ১৩·২

১। a, b, c ও d সমান্তর ধারার চারটি ক্রমিক পদ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. $b = \dfrac{c+d}{2}$ খ. $a = \dfrac{b+c}{2}$

গ. $c = \dfrac{b+d}{2}$ ঘ. $d = \dfrac{a+c}{2}$

২। (i) a+(a+d)+(d+2d)………………… ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি = $\dfrac{n}{2}$ {2a+(n-1)d}

(ii) 1+2+3…………+n = $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) 1+3+5+…………..+(2n-1) = n^2

উপরের বাক্যগুলোর কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. i ও iii

গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের ধারাটির ভিত্তিতে ৩ ও ৪ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

log 2+ log 4 + log 8 +……………………

৩। ধারাটির সাধারণ অন্তর কোনটি?

ক. 2 খ. 4

গ. log 2 ঘ. 2 log 2

৪। ধারাটির 7ম পদ কত?

ক. log 32 খ. log 64

গ. log 128 ঘ. log 256

৫। $64+32+16+8+\cdots\cdots\cdots$ ধারাটির অষ্টম পদ নির্ণয় কর।

৬। $3+9+27+\cdots\;\cdots\;\cdots$ ধারাটির প্রথম চৌদ্দটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

৭। $128+64+32+\cdots\cdots\cdots$ ধারাটির কোন পদ $\dfrac{1}{2}$?

৮। একটি গুণোত্তর ধারার পঞ্চম পদ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ এবং দশম পদ $\frac{8\sqrt{2}}{8}$ হলে, ধারাটির তৃতীয় পদ নির্ণয় কর।

৯। $\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, \sqrt{2}, \cdots \cdots \cdots$ ধারাটির কোন পদ $8\sqrt{2}$?

১০। $5 + x + y + 135$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় কর।

১১। $3 + x + y + z + 243$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, x, y এবং z এর মান নির্ণয় কর।

১২। $2 - 4 + 8 - 16 + \cdots \cdots \cdots$ ধারাটির প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি কত ?

১৩। $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \cdots \cdots$ ধারাটির $(2n+1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৪। $\log 2 + \log 4 + \log 8 + \cdots \cdots \cdots$ ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি কত ?

১৫। $\log 2 + \log 16 + \log 512 + \cdots \cdots \cdots$ ধারাটির প্রথম বারটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৬। $2 + 4 + 8 + 16 + \cdots \cdots \cdots$ ধারাটির $n-$সংখ্যক পদের সমষ্টি 254 হলে, $n-$এর মান কত ?

১৭। $2 - 2 + 2 - 2 + \cdots \cdots \cdots$ ধারাটির $(2n+2)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি কত ?

১৮। প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 441 হলে, n এর মান নির্ণয় কর এবং ঐ সংখ্যাগুলোর সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৯। প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 225 হলে, n এর মান কত ? ঐ সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি কত ?

২০। দেখাও যে, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots \cdots \cdots + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots \cdots \cdots + 10)^2$.

২১। $\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots \cdots \cdots + n^3}{1 + 2 + 3 + \cdots \cdots \cdots + n} = 210$ হলে $n-$এর মান কত ?

২২। 1 মিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি লৌহ দন্ডকে 10টি টুকরায় বিভক্ত করা হলো যাতে টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য গুণোত্তর ধারা গঠন করে। যদি বৃহত্তম টুকরাটি ক্ষুদ্রতম টুকরার 10গুণ হয়, তবে ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্যের মান আসন্ন মিলিমিটারে নির্ণয় কর।

২৩। একটি গুণোত্তর ধারার ১ম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, ধারাটির ৪র্থ পদ -2 এবং ৯তম পদ $8\sqrt{2}$

ক. উপরোক্ত তথ্যগুলোকে দুইটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. ধারাটির 12 তম পদ নির্ণয় কর।

গ. ধারাটি নির্ণয় করে প্রথম 7টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

২৪। কোনো ধারার n তম পদ 2n-4

ক. ধারাটি নির্ণয় কর।

খ. ধারাটির 10তম পদ এবং প্রথম 20টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ. প্রাপ্ত ধারাটির প্রথম পদকে প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরে একটি নতুন ধারা তৈরি কর এবং সূত্র প্রয়োগ করে ধারাটির প্রথম 8 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

চতুর্দশ অধ্যায়

অনুপাত, সদৃশতা ও প্রতিসমতা

(Ratio, Similarity and Symmetry)

দুইটি রাশির তুলনা করার জন্য তাদের অনুপাত বিবেচনা করা হয়। অনুপাত নির্ণয়ের জন্য রাশি দুইটি একই এককে পরিমাপ করতে হয়। এ সম্পর্কে বীজগণিতে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- জ্যামিতিক অনুপাত সম্পর্কে ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- রেখাংশের অন্তর্বিভক্তি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- অনুপাত সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো যাচাই ও প্রমাণ করতে পারবে।
- সদৃশতার অনুপাত সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো যাচাই ও প্রমাণ করতে পারবে।
- প্রতিসমতা ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- হাতে–কলমে বাস্তব উপকরণের সাহায্যে রেখা ও ঘূর্ণন প্রতিসমতা যাচাই করতে পারবে।

১৪·১ অনুপাত ও সমানুপাতের ধর্ম

(i) $a : b = x : y$ এবং $c : d = x : y$ হলে, $a : b = c : d$

(ii) $a : b = b : a$ হলে, $a = b$

(iii) $a : b = x : y$ হলে, $b : a = y : x$ (ব্যস্তকরণ)

(iv) $a : b = x : y$ হলে, $a : x = b : y$ (একান্তরকরণ)

(v) $a : b = c : d$ হলে, $ad = bc$ (আড়গুণন)

(vi) $a : b = x : y$ হলে, $a + b : b = x + y : y$ (যোজন)

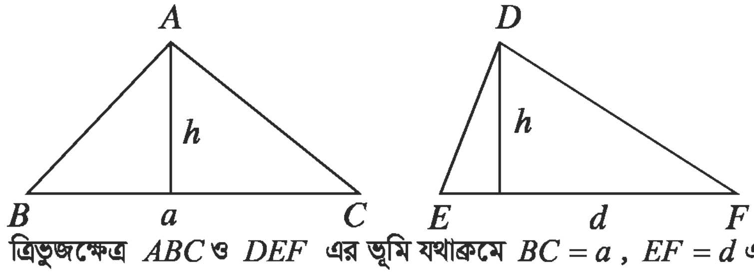
এবং $a - b : b = x - y : y$ (বিয়োজন)

(vii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ (যোজন ও বিয়োজন)

জ্যামিতিক সমানুপাত

আমরা ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে শিখেছি। এ থেকে দুইটি প্রয়োজনীয় অনুপাতের ধারণা তৈরি করা যায়।

(১) দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের উচ্চতা সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফল ও ভূমি সমানুপাতিক।



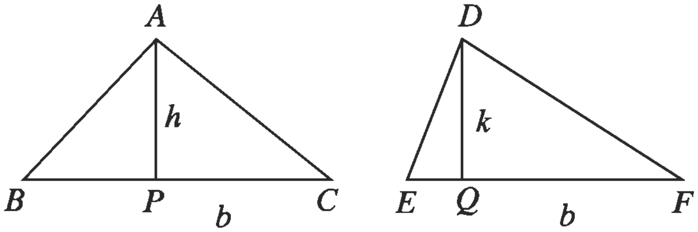
মনে করি, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC ও DEF এর ভূমি যথাক্রমে $BC = a$, $EF = d$ এবং উভয় ক্ষেত্রের উচ্চতা h।

সুতরাং, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}a \times h$, ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}d \times h$

অতএব, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল : ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}a \times h : \frac{1}{2}d \times h$

$= a : d = BC : EF$।

(২) দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ভূমি সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফল ও উচ্চতা সমানুপাতিক।



মনে করি, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC ও DEF এর উচ্চতা যথাক্রমে $AP = h$, $DQ = k$ এবং উভয়ক্ষেত্রের ভূমি b ।

সুতরাং, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}b \times h$, ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}b \times k$

অতএব, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল ঃ ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}b \times h$ ঃ $\frac{1}{2}b \times k$

$= h : k = AP : DQ$ ।

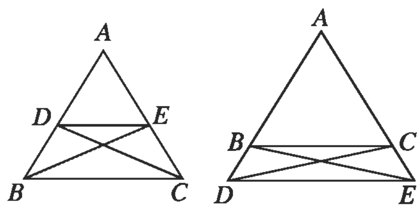
উপপাদ্য ১

ত্রিভুজের যেকোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে বা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।

বিশেষ নির্বচন : ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল DE রেখাংশ AB ও AC বাহুদ্বয়কে (চিত্র–১) অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে (চিত্র–২) যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AD : DB = AE : EC$.

অঙ্কন : B , E এবং C , D যোগ করি।



চিত্র ১ চিত্র ২

প্রমাণ :

ধাপ	**যথার্থতা**
(১) ΔADE এবং ΔBDE একই উচ্চতাবিশিষ্ট $\therefore \frac{\Delta ADE}{\Delta BDE} = \frac{AD}{DB}$	[একই উচ্চতাবিশিষ্ট ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফল ভূমির সমানুপাতিক]
(২)আবার, ΔADE এবং ΔDEC একই উচ্চতাবিশিষ্ট $\therefore \frac{\Delta ADE}{\Delta DEC} = \frac{AE}{EC}$	[একই উচ্চতাবিশিষ্ট ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফল ভূমির সমানুপাতিক]
(৩) কিন্তু $\Delta BDE = \Delta DEC$ $\therefore \frac{\Delta ADE}{\Delta BDE} = \frac{\Delta ADE}{\Delta DEC}$	[একই ভূমি DE ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত]

(৪) অতএব, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

অর্থাৎ, $AD : DB = AE : EC$.

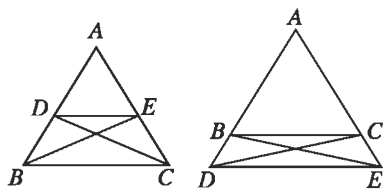
অনুসিদ্ধান্ত ১। ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে, তবে $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ২। ত্রিভুজের কোনো বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত অপর এক বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উপপাদ্য ১ এর বিপরীত প্রতিজ্ঞাও সত্য। অর্থাৎ কোনো সরলরেখা একটি ত্রিভুজের দুই বাহুকে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করলে উক্ত সরলরেখা ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হবে। নিচে প্রতিজ্ঞাটি প্রমাণ করা হলো।

উপপাদ্য ২

কোনো সরলরেখা একটি ত্রিভুজের দুই বাহুকে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করলে উক্ত সরলরেখা ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।



বিশেষ নির্বচন : DE রেখাংশ ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়কে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করেছে।
অর্থাৎ, $AD : DB = AE : EC$
প্রমাণ করতে হবে যে, DE এবং BC সমান্তরাল।

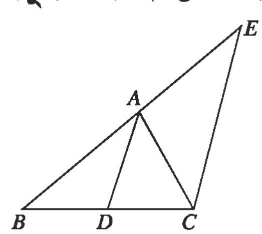
অঙ্কন : B, E এবং C, D যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) $\frac{\Delta ADE}{\Delta BDE} = \frac{AD}{DB}$	[ত্রিভুজ দুইটি একই উচ্চতাবিশিষ্ট]
এবং $\frac{\Delta ADE}{\Delta DEC} = \frac{AE}{EC}$	[ত্রিভুজ দুইটি একই উচ্চতাবিশিষ্ট]
(২) কিন্তু $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$	[স্বীকার]
(৩) অতএব, $\frac{\Delta ADE}{\Delta BDE} = \frac{\Delta ADE}{\Delta DEC}$ $\therefore \quad \Delta BDE = \Delta DEC$	[(১) এবং (২) থেকে]
(৪) কিন্তু ΔBDE এবং ΔDEC একই ভূমি DE এর একই পার্শ্বে অবস্থিত। সুতরাং তারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত। $\therefore$ BC ও DE সমান্তরাল।	

উপপাদ্য ৩

ত্রিভুজের যেকোনো কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, AD রেখাংশ ΔABC এর অন্তঃস্থ $\angle A$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $BD : DC = BA : AC$

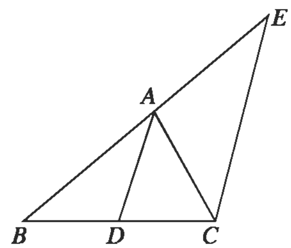
অঙ্কন : DA রেখাংশের সমান্তরাল করে C বিন্দু দিয়ে CE রেখাংশ অঙ্কন করি, যেন তা বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু $DA \parallel CE$ এবং AC তাদের ছেদক	[অঙ্কন]
$\angle AEC = \angle BAD$	[অনুরূপ কোণ]
এবং $\angle ACE = \angle CAD$	[একান্তর কোণ]
(২) কিন্তু $\angle BAD = \angle CAD$	[স্বীকার]
$\therefore \angle AEC = \angle ACE$; $\therefore AC = AE$	[উপপাদ্য ১]
(৩) আবার, যেহেতু $DA \parallel CE$, $\therefore \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AE}$	[ধাপ (২)]
(৪) কিন্তু $AE = AC$	
$\therefore \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AC}$	

উপপাদ্য ৪

ত্রিভুজের যেকোনো বাহু অপর দুই বাহুর অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে, বিভাগ বিন্দু থেকে বিপরীত শীর্ষ পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশ উক্ত শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজের A বিন্দু থেকে অঙ্কিত AD সরলরেখাংশ BC বাহুকে D বিন্দুতে এরূপে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে যে, $BD : DC = BA : AC$

প্রমাণ করতে হবে যে, AD রেখাংশ $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক অর্থাৎ, $\angle BAD = \angle CAD$.

অঙ্কন : DA রেখাংশের সমান্তরাল করে C বিন্দু দিয়ে এরূপ CE রেখাংশ অঙ্কন করি যেন তা BA বাহুর বর্ধিতাংশকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔBCE এর $DA \parallel CE$	[অঙ্কন]
$\therefore BA : AE = BD : DC$	[উপপাদ্য ১]
(২) কিন্তু $BD : DC = BA : AC$	[স্বীকার]
$\therefore BA : AE = BA : AC$	[ধাপ ১ ও ধাপ ২ থেকে]
$\therefore AE = AC$	
অতএব $\angle ACE = \angle AEC$	[সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি সমান]
(৩) কিন্তু $\angle AEC = \angle BAD$	[অনুরূপ কোণ]
এবং $\angle ACE = \angle CAD$	[একান্তর কোণ]
অতএব, $\angle BAD = \angle CAD$	[ধাপ ২ থেকে]
অর্থাৎ AD রেখাংশ $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক।	

অনুশীলনী ১৪·১

১। কোনো ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বিপরীত বাহু দুইটিকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে। XY, ভূমির সমান্তরাল হলে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

২। প্রমাণ কর যে, কতকগুলো পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখাকে দুইটি সরলরেখা ছেদ করলে অনুরূপ অংশগুলো সমানুপাতিক হবে।

৩। প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয় তাদের ছেদবিন্দুতে একই অনুপাতে বিভক্ত হয়।

৪। প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল।

৫। ABC ত্রিভুজের AD ও BE মধ্যমাদ্বয় পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করেছে। G বিন্দুর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত DE এর সমান্তরাল রেখাংশ AC কে F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AC = 6EF$.

৬। ΔABC এর BC বাহুস্থ যেকোনো বিন্দু X এবং AX রেখাস্থ O একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে,
$\Delta AOB : \Delta AOC = BX : XC$

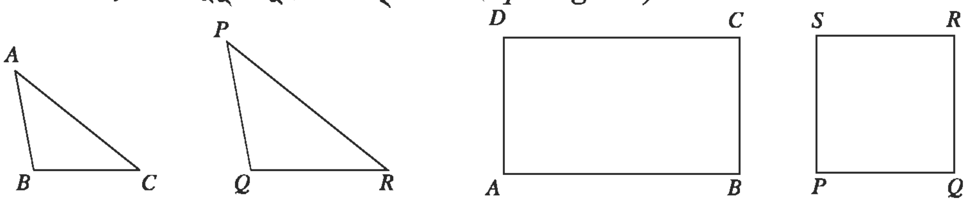
৭। ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ কর যে, $BD : DC = BE : CF$

৮। ABC ও DEF সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের উচ্চতা AM ও DN হলে প্রমাণ কর যে,
$AM : DN = AB : DE$.

১৪·৩ সদৃশতা

সপ্তম শ্রেণিতে ত্রিভুজের সর্বসমতা ও সদৃশতা নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। সাধারণভাবে, সর্বসমতা সদৃশতার বিশেষ রূপ। দুইটি চিত্র সর্বসম হলে সেগুলো সদৃশ; তবে চিত্র দুইটি সদৃশ হলে সেগুলো সর্বসম নাও হতে পারে।

সদৃশকোণী বহুভুজ : সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির কোণগুলো যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির কোণগুলোর সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী (*equiangular*) বলা হয়।



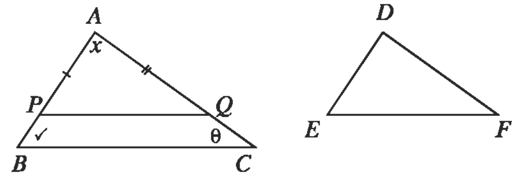
সদৃশ বহুভুজ : সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির শীর্ষবিন্দুগুলোকে যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিল করা যায় যে, বহুভুজ দুইটির (১) অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং (২) অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাতগুলো সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশ (*Similar*) বহুভুজ বলা হয়।

উপরের চিত্রে আমরা লক্ষ করি যে, $ABCD$ আয়ত ও $PQRS$ বর্গ সদৃশকোণী। কারণ, উভয় চিত্রে বাহুর সংখ্যা 4 এবং আয়তের কোণগুলো ধারাবাহিকভাবে বর্গটির কোণগুলোর সমান (সবগুলো কোণ সমকোণ)। কিন্তু চিত্রগুলোর অনুরূপ কোণগুলো সমান হলেও অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান নয়। ফলে সেগুলো সদৃশ নয় । ত্রিভুজের ক্ষেত্রে অবশ্য এরকম হয় না। দুইটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর কোণ মিলকরণের ফলে সদৃশতার সংজ্ঞায় উল্লেখিত শর্ত দুইটির একটি সত্য হলে অপরটিও সত্য হয় এবং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হয়। অর্থাৎ, সদৃশ ত্রিভুজ সর্বদা সদৃশকোণী এবং সদৃশকোণী ত্রিভুজ সর্বদা সদৃশ।

দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে এবং এদের কোনো এক জোড়া অনুরূপ বাহু সমান হলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হয়। দুইটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত ধ্রুবক। নিচে এ সংক্রান্ত উপপাদ্যের প্রমাণ দেওয়া হলো।

উপপাদ্য ৫

দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$;

প্রমাণ করতে হবে যে, $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

অঙ্কন : ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের প্রত্যেক অনুরূপ বাহুযুগল অসমান বিবেচনা করি। AB বাহুতে P বিন্দু এবং AC বাহুতে Q বিন্দু নিই যেন $AP = DE$ এবং $AQ = DF$ হয়। P ও Q যোগ করে অঙ্কন সম্পন্ন করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔAPQ ও ΔDEF এর $AP = DE$, $AQ = DF$, $\angle A = \angle D$ অতএব, $\Delta APQ \cong \Delta DEF$	[বাহু–কোণ–বাহুর সর্মসমতা]
সুতরাং, $\angle APQ = \angle DEF = \angle ABC$ এবং $\angle AQP = \angle DFE = \angle ACB.$ অর্থাৎ, PQ রেখাংশ ও BC বাহুকে AB বাহু ও AC রেখা ছেদ করায় অনুরূপ কোণযুগল সমান হয়েছে। সুতরাং, $PQ \parallel BC$; $\therefore$ $\dfrac{AB}{AP} = \dfrac{AC}{AQ}$ বা, $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}.$	[উপপাদ্য ১]
(২) একইভাবে BA বাহু ও BC বাহু থেকে যথাক্রমে ED রেখাংশ ও EF রেখাংশের সমান রেখাংশ কেটে নিয়ে দেখানো যায় যে, $\dfrac{BA}{ED} = \dfrac{BC}{EF}$	[উপপাদ্য ১]
অর্থাৎ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$; $\therefore$ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}.$	

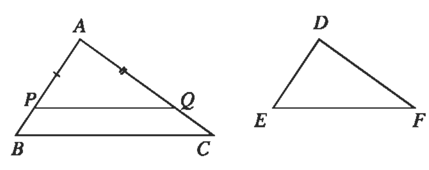
উপপাদ্য ৫ এর বিপরীত প্রতিজ্ঞাটিও সত্য।

উপপাদ্য ৬

দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি,

ΔABC ও ΔDEF এর $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}.$



প্রমাণ করতে হবে যে, . $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F.$

অঙ্কন:

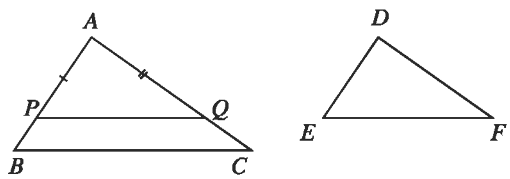
ΔABC ও ΔDEF এর প্রত্যেক অনুরূপ বাহুযুগল অসমান বিবেচনা করি। AB বাহুতে P বিন্দু এবং AC বাহুতে Q বিন্দু নিই যেন $AP = DE$ এবং $AQ = DF$ হয়। P ও Q যোগ করে অঙ্কন সম্পন্ন করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$, সুতরাং $\frac{AB}{AP}=\frac{AC}{AQ}$.	
সুতরাং, $PQ \parallel BC$	[উপপাদ্য ২]
$\therefore \angle ABC=\angle APQ$ এবং $\angle ACB=\angle AQP$	[AB ছেদক দ্বারা উৎপন্ন অনুরূপ কোণ]
$\therefore \Delta ABC$ ও ΔAPQ সদৃশকোণী।	[AC ছেদক দ্বারা উৎপন্ন অনুরূপ কোণ]
সুতরাং $\frac{AB}{AP}=\frac{BC}{PQ}$ বা, $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{PQ}$.	[উপপাদ্য ৫]
$\therefore \frac{BC}{EF}=\frac{BC}{PQ}$ [কল্পনানুসারে] ; $\therefore \frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$	
$\therefore EF=PQ$	
সুতরাং, ΔAPQ ও ΔDEF সর্বসম।	
$\therefore \angle PAQ=\angle EDF, \angle APQ=\angle DEF, \angle AQP=\angle DFE$	[বাহু–বাহু–বাহু উপপাদ্য]
$\therefore \angle APQ=\angle ABC$ এবং $\angle AQP=\angle ACB$	
$\angle A=\angle D,\ \angle B=\angle E,\ \angle C=\angle F.$	

উপপাদ্য ৭

দুইটি ত্রিভুজের একটির এক কোণ অপরটির এক কোণের সমান হলে এবং সমান সমান কোণ সংলগ্ন বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এবং ΔDEF এমন যে,

$\angle A=\angle D$ এবং $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$

প্রমাণ করতে হবে যে, ΔABC এবং ΔDEF সদৃশ।

অঙ্কন :

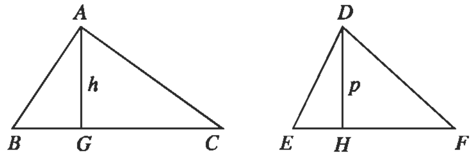
ΔABC ও ΔDEF এর প্রত্যেক অনুরূপ বাহুযুগল অসমান বিবেচনা করি। AB বাহুতে P বিন্দু এবং AC বাহুতে Q বিন্দু নিই যেন $AP=DE$ এবং $AQ=DF$ হয়। P ও Q যোগ করে অঙ্কন সম্পন্ন করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
ΔAPQ ও ΔDEF এর $AP=DE,\ AQ=DF$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle A=$ অন্তর্ভুক্ত $\angle D$, $\therefore \Delta APQ \cong \Delta DEF$	[বাহু–কোণ–বাহু উপপাদ্য]
$\therefore \angle A=\angle D,\ \angle APQ=\angle E,\ \angle AQP=\angle F.$	
আবার, যেহেতু $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$, সুতরাং $\frac{AB}{AP}=\frac{AC}{AQ}$.	[উপপাদ্য ২]
$\therefore PQ \parallel BC$	
সুতরাং $\angle ABC=\angle APQ$ এবং $\angle ACB=\angle AQP$	
$\therefore \angle A=\angle D, \angle B=\angle E$ এবং $\angle C=\angle F$	
অর্থাৎ, ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী।	
সুতরাং ΔABC ও ΔDEF সদৃশ।	

উপপাদ্য ৮

দুইটি সদৃশ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত তাদের যেকোনো দুই অনুরূপ বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাতের সমান।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ এবং তাদের দুইটি অনুরূপ বাহু BC ও EF .

প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC : \Delta DEF = BC^2 : EF^2$

অঙ্কন : BC ও EF এর ওপর যথাক্রমে AG ও DH লম্ব আঁকি। মনে করি, $AG = h$, $DH = p$.

প্রমাণ :

(ক) $\Delta ABC = \frac{1}{2} BC.h$ এবং $\Delta DEF = \frac{1}{2} EF.p$

$$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{\frac{1}{2} BC.h}{\frac{1}{2} EF.p} = \frac{h.BC}{p.EF} = \frac{h}{p} \times \frac{BC}{EF}$$

(২) ABG এবং DEH ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle B = \angle E$, $\angle AGB = \angle DHE$ (= এক সমকোণ)।

$\therefore \angle BAG = \angle EDH$

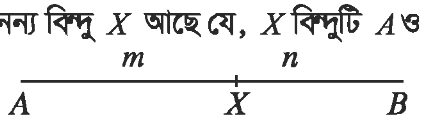
$\therefore \Delta ABG$ ও ΔDEH সদৃশকোণী, তাই সদৃশ।

(৩ $\therefore \frac{h}{p} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ [কারণ ΔABC ও ΔDEF সদৃশ]

$$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{h}{p} \times \frac{BC}{EF} = \frac{BC}{EF} \times \frac{BC}{EF} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

১৪·১। নির্দিষ্ট অনুপাতে রেখাংশের বিভক্তিকরণ

সমতলে দুইটি ভিন্ন বিন্দু A ও B এবং m ও n যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা হলে আমরা স্বীকার করে নিই যে, AB রেখায় এমন অনন্য বিন্দু X আছে যে, X বিন্দুটি A ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী এবং $AX : XB = m : n$.



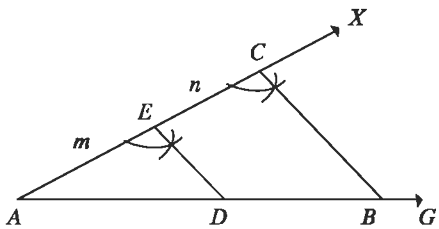
ওপরের চিত্রে, AB রেখাংশ X বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে। তাহলে, $AX : XB = m : n$.

সম্পাদ্য ১

কোনো রেখাংশকে একটি নির্দিষ্ট অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করতে হবে।

মনে করি, AB রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ : A বিন্দুতে যেকোনো কোণ $\angle BAX$ অঙ্কন করি এবং AX রশ্মি থেকে পরপর $AE = m$ এবং $EC = n$ অংশ কেটে নিই। B, C যোগ করি। E বিন্দু দিয়ে CB এর সমান্তরাল ED রেখাংশ অঙ্কন করি যা AB কে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে AB রেখাংশ D বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলো।



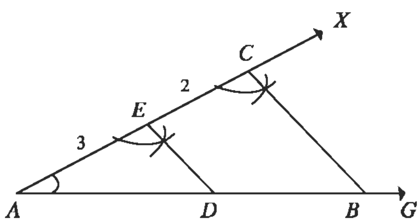
প্রমাণ : যেহেতু DE রেখাংশ ABC ত্রিভুজের এক বাহু BC এর সমান্তরাল,

$\therefore AD : DB = AE : EC = m : n$

কাজ : ১। বিকল্প পদ্ধতিতে কোনো রেখাংশকে নির্দিষ্ট অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত কর।

উদাহরণ ১। 7 সে.মি. দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশকে 3:2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত কর।

সমাধান : যেকোনো একটি রশ্মি AG আঁকি এবং AG থেকে 7 সে.মি. সমান রেখাংশ AB নিই। A বিন্দুতে যেকোনো কোণ $\angle BAX$ অঙ্কন করি। AX রশ্মি থেকে $AE = 3$ সে.মি. কেটে নিই এবং EX থেকে $EC = 2$ সে.মি. কেটে নিই। B, C যোগ করি। E বিন্দুতে $\angle ACB$ এর সমান $\angle AED$ অঙ্কন করি যার ED রেখা AB কে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে AB রেখাংশ D বিন্দুতে $3 : 2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলো।



কাজ: একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সদৃশ একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর যার বাহুগুলো মূল ত্রিভুজের বাহুগুলোর $\frac{3}{5}$ গুণ।

অনুশীলনী ১৪.২

১। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর:

i দুইটি রাশির তুলনা করার জন্য তাদের অনুপাত বিবেচনা করা হয়

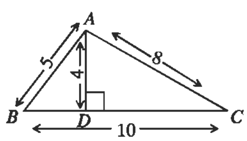
ii অনুপাত নির্ণয়ের জন্য রাশি দুইটি একই এককে পরিমাপ করতে হয়

iii অনুপাত নির্ণয়ের ক্ষেত্রে রাশি দুইটি একই জাতীয় হতে হয়

নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii



উপরের চিত্রের তথ্যানুসারে (২ ও ৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

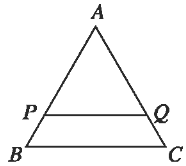
২। ΔABC এর উচ্চতা ও ভূমির অনুপাত কত?

ক. $\frac{1}{2}$ খ. $\frac{4}{5}$ গ. $\frac{2}{5}$ ঘ. $\frac{5}{4}$

৩। ΔABD এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

ক. 6 খ. 20 গ. 40 ঘ. 50

৪। ΔABC- এ $PQ \parallel BC$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?



ক. $AP : PB = AQ : QC$ খ. $AB : PQ = AC : PQ$

গ. $AB : AC = PQ : BC$ ঘ. $PQ : BC = BP : BQ$

৫। একটি বর্গের সর্বোচ্চ (মোট) কতটি প্রতিসাম্য রেখা আছে?

ক. 10টি খ. 8টি

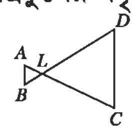
গ. 6টি ঘ. 4টি

৬। প্রমাণ কর যে, দুইটি ত্রিভুজের প্রত্যেকটি যদি তৃতীয় একটি ত্রিভুজের সদৃশ হয়, তবে তারা পরস্পর সদৃশ।

৭। প্রমাণ কর যে, দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের একটির একটি সূক্ষ্মকোণ অপরটির একটি সূক্ষ্মকোণের সমান হলে, ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হবে।

৮। প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক শীর্ষ থেকে অতিভুজের উপর লম্ব আঁকলে যে দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তারা পরস্পর সদৃশ এবং প্রত্যেকে মূল ত্রিভুজের সদৃশ।

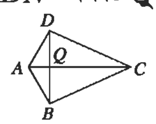
৯। পাশের চিত্রে, $\angle B = \angle D$ এবং $CD = 4AB$.
প্রমাণ কর যে, $BD = 5BL$.



১০। $ABCD$ সামান্তরিকের A শীর্ষ দিয়ে অঙ্কিত একটি রেখাংশ BC বাহুকে M বিন্দুতে এবং DC বাহুর বর্ধিতাংশকে N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $BM \times DN$ একটি ধ্রুবক।

১১। পাশের চিত্রে $BD \perp AC$ এবং

$$DQ = BQ = 2AQ = \frac{1}{2}QC.$$



প্রমাণ কর যে, $DA \perp DC$.

১২। ΔABC ও ΔDEF এর $\angle A = \angle D$.
প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC : \Delta DEF = AB.AC : DE.DF$.

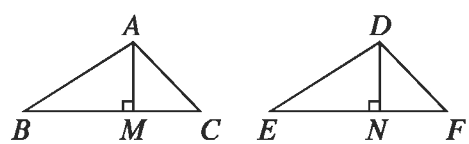
১৩। ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক. তথ্য অনুসারে চিত্রটি অঙ্কন কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $BD : DC = BA : AC$

গ. BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ কর যে, $BD : DC = BP : CQ$

১৪। চিত্রে ABC এবং DEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ।



ক. ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণগুলোর নাম লিখ।

খ. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

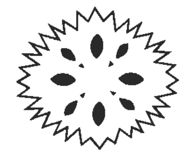
গ. যদি $BC = 3$ সে.মি., $EF = 8$ সে.মি., $\angle B = 60^\circ, \frac{BC}{AB} = \frac{3}{2}$ এবং $\Delta ABC = 3$ বর্গ সে.মি. হয়, তবে ΔDEF অঙ্কন কর এবং এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১৪·৪ প্রতিসমতা

প্রতিসমতা একটি প্রয়োজনীয় জ্যামিতিক ধারণা যা প্রকৃতিতে বিদ্যমান এবং যা আমাদের কর্মকান্ডে প্রতিনিয়ত ব্যবহার করে থাকি। প্রতিসমতার ধারণাকে শিল্পী, কারিগর, ডিজাইনার, ছুতাররা প্রতিনিয়ত ব্যবহার করে থাকেন। গাছের পাতা, ফুল, মৌচাক, ঘরবাড়ি, টেবিল, চেয়ার সবকিছুর মধ্যে প্রতিসমতা বিদ্যমান। যদি কোনো সরলরেখা বরাবর কোনো চিত্র ভাঁজ করলে তার অংশ দুইটি সম্পূর্ণভাবে মিলে যায় সেক্ষেত্রে সরলরেখাটিকে প্রতিসাম্য রেখা বলা হয়।

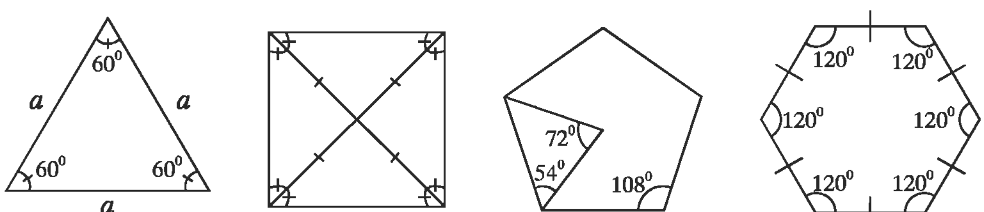
উপরের চিত্রগুলোর প্রতিটির প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে। শেষের চিত্রটির একাধিক প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।

কাজ :
১। সুমি কাগজ কেটে পাশের চিত্রের ডিজাইন তৈরি করেছে। চিত্রে প্রতিসম রেখাসমূহ চিহ্নিত কর। এর কয়টি প্রতিসম রেখা রয়েছে ?
২। ইংরেজি বর্ণমালার যে সকল বর্ণের প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে সেগুলো লিখে প্রতিসাম্য রেখা চিহ্নিত কর।



১৪·৫ সুষম বহুভুজের প্রতিসাম্য রেখা

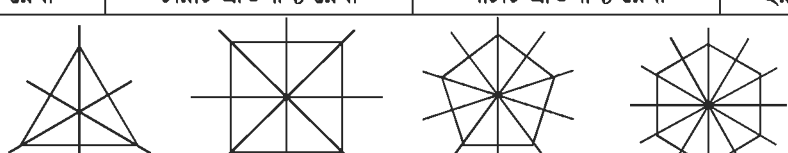
বহুভুজ কতকগুলো রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্র। বহুভুজের রেখাংশগুলোর দৈর্ঘ্য সমান ও কোণগুলো সমান হলে তাকে সুষম বহুভুজ বলা হয়। ত্রিভুজ হলো সবচেয়ে কম সংখ্যক রেখাংশ দিয়ে গঠিত বহুভুজ। সমবাহু ত্রিভুজ হলো তিন বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ। সমবাহু ত্রিভুজের বাহু ও কোণগুলো সমান। চার বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ হলো বর্গক্ষেত্র। বর্গক্ষেত্রের বাহু ও কোণগুলো সমান । অনুরূপভাবে, সুষম পঞ্চভুজ ও সুষম ষড়্ভুজের বাহু ও কোণগুলো সমান।



সমবাহু ত্রিভুজ   বর্গক্ষেত্র   সুষম পঞ্চভুজ   সুষম ষড়্ভুজ

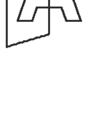
প্রত্যেক সুষম বহুভুজ একটি প্রতিসম চিত্র। সুতরাং তাদের প্রতিসাম্য রেখার সম্পর্কে জানা আবশ্যক। সুষম বহুভুজের অনেক বাহুর পাশাপাশি একাধিক প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।

তিনটি প্রতিসাম্য রেখা	চারটি প্রতিসাম্য রেখা	পাঁচটি প্রতিসাম্য রেখা	ছয়টি প্রতিসাম্য রেখা



সমবাহু ত্রিভুজ   বর্গক্ষেত্র   সুষম পঞ্চভুজ   সুষম ষড়্ভুজ

প্রতিসমতার ধারণার সাথে আয়নার প্রতিফলনের সম্পর্ক রয়েছে। কোনো জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিসাম্য রেখা তখনই থাকে, যখন তার অর্ধাংশের প্রতিচ্ছবি বাকি অর্ধাংশের সাথে মিলে যায়। এজন্য প্রতিসাম্য রেখা নির্ণয়ে কাল্পনিক আয়নার অবস্থান রেখার সাহায্য নেওয়া হয়। রেখা প্রতিসমতাকে প্রতিফলন প্রতিসমতাও বলা হয়।

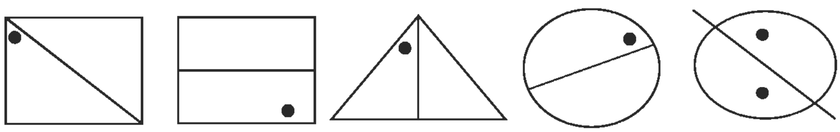


অনুশীলনী ১৪·৩

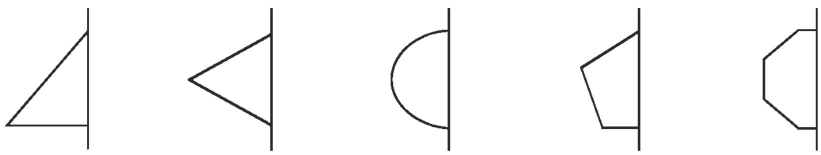
১। নিচের চিত্রসমূহের কোনটির প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে?

(ক) বাড়ির চিত্র (খ) মসজিদের চিত্র (গ) মন্দিরের চিত্র (গ) গীর্জার চিত্র, (গ) প্যাগোডার চিত্র (ঘ) পার্লামেন্ট ভবনের চিত্র, (ঙ) মুখোশের চিত্র (চ) তাজমহলের চিত্র

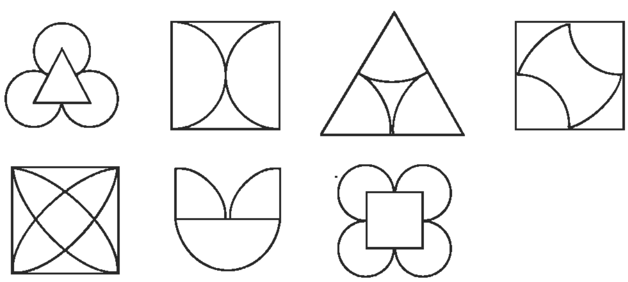
২। প্রতিসাম্য রেখা দেওয়া আছে, অন্য ফুটকি প্রদর্শন কর :



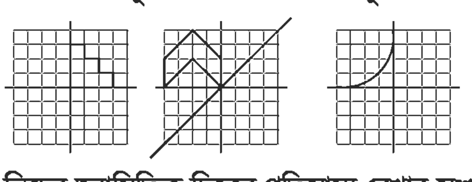
৩। প্রতিসাম্য রেখা দেওয়া আছে (ড্যাশযুক্ত রেখা), জ্যামিতিক চিত্র সম্পূর্ণ কর এবং শনাক্ত কর।



৪। নিচের জ্যামিতিক চিত্রে প্রতিসাম্য রেখা নির্দেশ কর:



৫। নিচের অসম্পূর্ণ জ্যামিতিক চিত্র সম্পূর্ণ কর যেন আয়না রেখা সাপেক্ষে প্রতিসম হয় :



৬। নিচের জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিসাম্য রেখার সংখ্যা নির্ণয় কর:

(ক) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (খ) বিষমবাহু ত্রিভুজ (গ) বর্গক্ষেত্র (ঘ) রম্বস

(ঙ) সুষম ষড়ভুজ (চ) পঞ্চভুজ (ছ) বৃত্ত

৭। ইংরেজি বর্ণমালার যে সকল বর্ণের

(ক) অনুভূমিক আয়না (খ) উলম্ব আয়না

(গ) অনুভূমিক ও উলম্ব উভয় আয়না

সাপেক্ষে প্রতিফলন প্রতিসমতা রয়েছে সেগুলো আঁক।

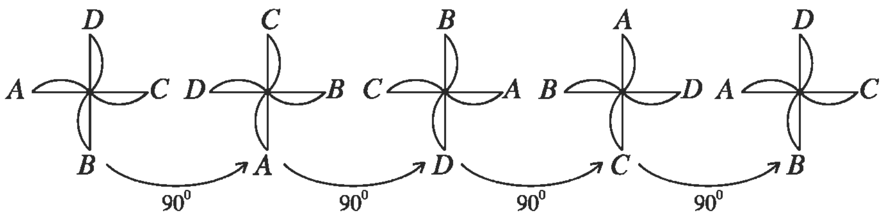
৮। প্রতিসমতা নেই এমন তিনটি চিত্র অঙ্কন কর।

১৪·৬ ঘূর্ণন প্রতিসমতা

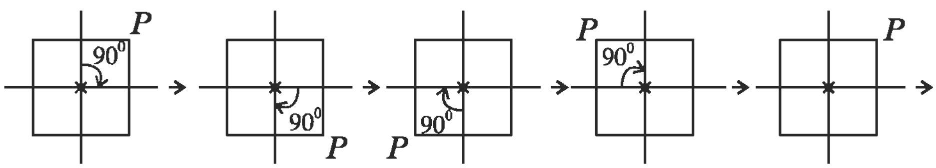
কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে ঘূর্ণনের ফলে বস্তুর আকৃতি ও আকারের পরিবর্তন হয় না। তবে বস্তুর বিভিন্ন অংশের অবস্থানের পরিবর্তন হয়। ঘূর্ণনের ফলে বস্তুর নতুন অবস্থানে বস্তুর আকৃতি ও আকার আদি অবস্থানের ন্যায় একই হলে আমরা বলি বস্তুটির ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে। যেমন, সাইকেলের চাকা, সিলিং ফ্যান, বর্গ ইত্যাদি। একটি সিলিং ফ্যানের পাখাগুলোর ঘূর্ণনের ফলে একাধিকবার মূল অবস্থানের সাথে মিলে যায়। পাখাগুলো ঘড়ির কাঁটার দিকেও ঘুরতে পারে আবার বিপরীত দিকেও ঘুরতে পারে। সাইকেলের চাকা ঘড়ির কাঁটার দিকেও ঘুরতে পারে, আবার বিপরীত দিকেও ঘুরতে পারে। ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘূর্ণনকে ধনাত্মক দিক হিসেবে ধরা হয়।

যে বিন্দুর সাপেক্ষে বস্তুটি ঘোরে তা হলো ঘূর্ণন কেন্দ্র। ঘূর্ণনের সময় যে পরিমাণ কোণে ঘোরে তা হলো ঘূর্ণন কোণ। একবার পূর্ণ ঘূর্ণনের কোণের পরিমাণ $360°$, অর্ধ্ব ঘূর্ণনের কোণের পরিমাণ $180°$।

চিত্রে চার পাখাবিশিষ্ট ফ্যানের $90°$ করে ঘূর্ণনের ফলে বিভিন্ন অবস্থান দেখানো হয়েছে। লক্ষ করি, একবার পূর্ণ ঘূর্ণনে ঠিক চারটি অবস্থানে ($90°$, $180°$, $270°$ ও $360°$ কোণে ঘূর্ণনের ফলে) ফ্যানটি দেখতে হুবহু একই রকম। এজন্য বলা হয় ফ্যানটির ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা 4।



ঘূর্ণন প্রতিসমতার অন্য একটি উদাহরণ নেয়া যায়। একটি বর্গের কর্ণ দুইটির ছেদবিন্দুকে ঘূর্ণন কেন্দ্র ধরি। ঘূর্ণন কেন্দ্রের সাপেক্ষে বর্গটির এক–চতুর্থাংশ ঘূর্ণনের ফলে যেকোনো কৌণিক বিন্দুর অবস্থান দ্বিতীয় চিত্রের ন্যায় হবে। এভাবে চারবার এক–চতুর্থাংশ ঘূর্ণনের ফলে বর্গটি আদি অবস্থানে ফিরে আসে। বলা হয়, বর্গের 4 মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে।



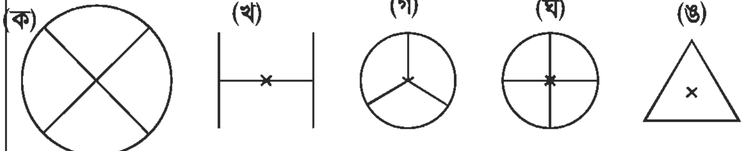
লক্ষ করি, যেকোনো চিত্র একবার পূর্ণ ঘূর্ণনের ফলে আদি অবস্থানে ফিরে আসে। তাই যেকোনো জ্যামিতিক চিত্রের 1 মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে।

ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে নিচের বিষয়গুলো লক্ষ রাখতে হবে:

(ক) ঘূর্ণন কেন্দ্র (খ) ঘূর্ণন কোণ (গ) ঘূর্ণনের দিক (ঘ) ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা।

কাজ : ১। তোমার চারপাশের পরিবেশ থেকে 5টি সমতলীয় বস্তুর উদাহরণ দাও যাদের ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে।

২। নিচের চিত্রের ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় কর।



১৪·৭ রেখা প্রতিসমতা ও ঘূর্ণন প্রতিসমতা

আমরা দেখেছি যে কিছু জ্যামিতিক চিত্রের শুধু রেখা প্রতিসমতা রয়েছে, কিছুর শুধু ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে। আবার কোনো কোনো চিত্রের রেখা প্রতিসমতা ও ঘূর্ণন প্রতিসমতা উভয়ই বিদ্যমান। যেমন, বর্গের যেমন চারটি প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে, তেমনি 4 মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে।

বৃত্ত একটি আদর্শ প্রতিসম চিত্র। বৃত্তকে এর কেন্দ্রের সাপেক্ষে যেকোনো কোণে ও যেকোনো দিকে ঘুরালে এর অবস্থানের পরিবর্তন লক্ষ করা যায় না। অতএব, বৃত্তের ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা অসীম। একই সময় বৃত্তের কেন্দ্রগামী যেকোনো রেখা এর প্রতিসাম্য রেখা। সুতরাং, বৃত্তের অসংখ্য প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।

কাজ :

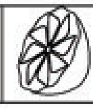
১। ইংরেজি বর্ণমালার কয়েকটি বর্ণের রেখা প্রতিসমতা ও ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ধারণ কর এবং নিচের সারণিটি পূরণ কর:
(একটি করে দেখানো হলো)

বর্ণ	রেখা প্রতিসমতা	প্রতিসাম্য রেখার সংখ্যা	ঘূর্ণন প্রতিসমতা	ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা
Z	নেই	০	হ্যাঁ	২
H				
O				
E				
C				

অনুশীলনী ১৪·৪

১। নিচের চিত্রের ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় কর :

২। একটি লেবু আড়াআড়ি কেটে চিত্রের ন্যায় আকার পাওয়া গেল। সমতলীয় চিত্রটির ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় কর।



৩। শূন্যস্থান পূরণ কর :

চিত্র	ঘূর্ণন কেন্দ্র	ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা	ঘূর্ণন প্রতিসমতার কোণ
বর্গ			
আয়ত			
রম্বস			
সমবাহু ত্রিভুজ			
অর্ধবৃত্ত			
সুষম পঞ্চভুজ			

৪। যে সকল চতুর্ভুজের রেখা প্রতিসমতা ও 1 এর অধিক মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে, তাদের তালিকা কর।

৫। 1 এর অধিক মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে এরূপ চিত্রের ঘূর্ণন কোণ 18° হতে পারে কি ? তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

পঞ্চদশ অধ্যায়

ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত উপপাদ্য ও সম্পাদ্য

(Area Related Theorems and Constructions)

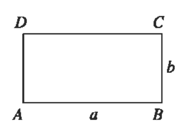
আমরা জানি সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের আকৃতি বিভিন্ন রকম হতে পারে। সমতল ক্ষেত্র যদি চারটি বাহুদ্বারা সীমাবদ্ধ হয়, তবে তাকে আমরা চতুর্ভুজ বলে থাকি। এই চতুর্ভুজের আবার শ্রেণি বিভাগ আছে এবং আকৃতি ও বৈশিষ্ট্যের উপর ভিত্তি করে তাদের নামকরণও করা হয়েছে। এই সকল সমতল ক্ষেত্রের বাইরে অনেক ক্ষেত্র আছে যাদের বাহু চারের অধিক। আলোচিত এ সকল ক্ষেত্রই বহুভুজক্ষেত্র। প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতলক্ষেত্রের নির্দিষ্ট পরিমাপ আছে যাকে ক্ষেত্রফল বলে অভিহিত করা হয়। এই সকল ক্ষেত্রফল পরিমাপের জন্য সাধারণত এক একক বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ব্যবহার করা হয় এবং তাদের ক্ষেত্রফলকে বর্গ একক হিসেবে লেখা হয়। যেমন, বাংলাদেশের ক্ষেত্রফল ১৪৪ (প্রায়) হাজার বর্গ কিলোমিটার। আমাদের দৈনন্দিন জীবনের প্রয়োজন মেটাতে বহুভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল জানতে ও পরিমাপ করতে হয়। তাই এ স্তরের শিক্ষার্থীদের বহুভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান প্রদান করা অতীব গুরুত্বপূর্ণ। এখানে বহুভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ধারণা এবং এতদসংক্রান্ত কতিপয় উপপাদ্য ও সম্পাদ্য বিষয়ক বিষয়বস্তু উপস্থাপন করা হয়েছে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- বহুভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত উপপাদ্য যাচাই ও প্রমাণ করতে পারবে।
- প্রদত্ত উপাত্ত ব্যবহার করে বহুভুজ ক্ষেত্র অঙ্কন ও অঙ্কনের যথার্থতা যাচাই করতে পারবে।
- ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান চতুর্ভুজক্ষেত্র অঙ্কন করতে পারবে।
- চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান ত্রিভুজক্ষেত্র অঙ্কন করতে পারবে।

১৫·১ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল রয়েছে। এই ক্ষেত্রফল পরিমাপের জন্য সাধারণত এক একক বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে বর্গ একক হিসেবে গ্রহণ করা হয়। যেমন, যে বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য এক সেন্টিমিটার তার ক্ষেত্রফল হবে এক বর্গসেন্টিমিটার।



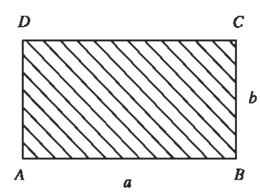
আমরা জানি,

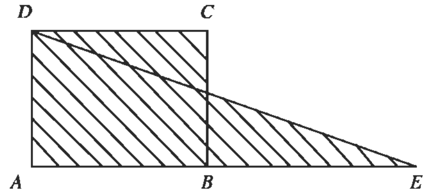
(ক) $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের

দৈর্ঘ্য $AB = a$ একক (যথা, মিটার)

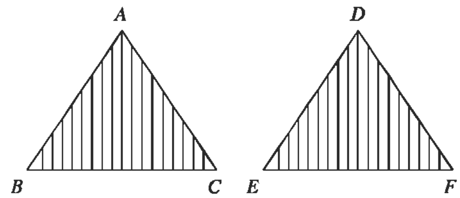
প্রস্থ $BC = b$ একক (যথা, মিটার) হলে,

$ABCD$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ab বর্গ একক (যথা, বর্গমিটার)।



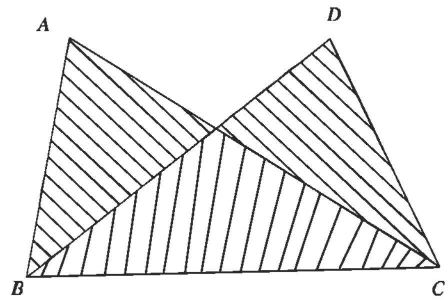


(খ) $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = a একক (যথা, মিটার) হলে, $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = a^2 বর্গ একক (যথা, বর্গমিটার)।



দুইটি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলে তাদের মধ্যে '=' চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। যেমন, $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = AED ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল। যেখানে AB=BE

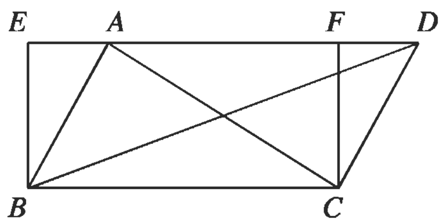
উল্লেখ্য যে, ΔABC ও ΔDEF সর্বসম হলে, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ লেখা হয়। এক্ষেত্রে অবশ্যই ΔABC এর ক্ষেত্রফল = ΔDEF এর ক্ষেত্রফল।



কিন্তু দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয় না। যেমন, চিত্রে ΔABC এর ক্ষেত্রফল = ΔDBC এর ক্ষেত্রফল। কিন্তু ΔABC ও ΔDBC সর্বসম নয়।

উপপাদ্য ১

একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত সকল ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান।



মনে করি, ABC ও DBC ত্রিভুজক্ষেত্রদ্বয় একই ভূমি BC এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল BC ও AD এর মধ্যে অবস্থিত। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র DBC এর ক্ষেত্রফল।

অঙ্কন : BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে BE ও CF লম্ব অঙ্কন করি। এরা DA রেখার বর্ধিত অংশকে E বিন্দুতে এবং AD রেখাকে F বিন্দুতে ছেদ করে। ফলে $EBCF$ একটি আয়তক্ষেত্র তৈরি হয়।

প্রমাণ : $EBCF$ একটি আয়তক্ষেত্র, এখন Δ ক্ষেত্র ABC এবং আয়তক্ষেত্র $EBCF$ একই ভূমি BC এর উপর এবং BC ও ED সমান্তরাল রেখাংশের মধ্যে অবস্থিত।

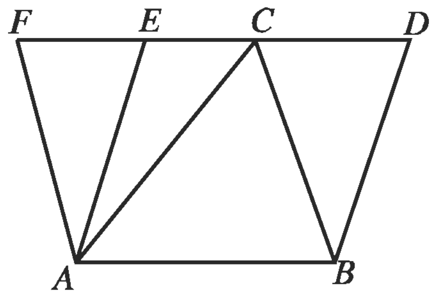
সুতরাং Δ ক্ষেত্র $ABC = \dfrac{1}{2}$ (আয়তক্ষেত্র $EBCF$)

অনুরূপভাবে, Δ ক্ষেত্র DBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\dfrac{1}{2}$ (আয়তক্ষেত্র $EBCF$)

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র ABC ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র DBC –এর ক্ষেত্রফল (প্রমাণিত)।

উপপাদ্য ২

কোনো ত্রিভুজ ও সামান্তরিক একই ভূমি ও একই সামান্তরালযুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।



মনে করি, ΔABC ও সামান্তরিক ABDE একই ভূমি AB ও একই সমান্তরালযুগল AB ও ED এর মধ্যে অবস্থিত। প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক ABDE.

অঙ্কন : A বিন্দু দিয়ে BC এর সমান্তরাল AF রেখা DC এর বর্ধিতাংশকে F বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : (১) $AF \parallel BC$ (অঙ্কনানুসারে) এবং

$AB \parallel FC$ (কল্পনানুসারে)

$\therefore$ ABCF সামান্তরিক

(১) সামান্তরিক ABDE ও ABCF একই ভূমি AB এবং একই সমান্তরালযুগল AB ও FD এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ সামান্তরিক ABDE = সামান্তরিক ABCF (উপপাদ্য ১)

(২) সামান্তরিক ABCF এর AC কর্ণ

$\therefore \Delta ABC = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক ABCF

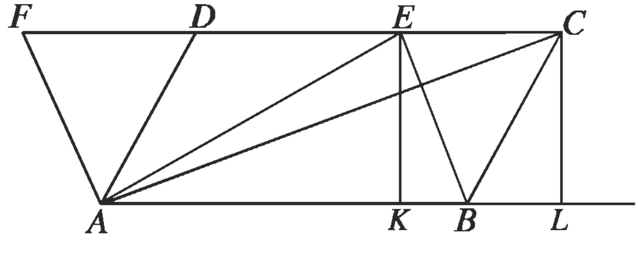
$= \frac{1}{2}$ সামান্তরিক ABDE (ধাপ ২)

অনুসিদ্ধান্ত ১: একই ভূমি ও একই সমান্তরালযুগলের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফল সমান।

অনুসিদ্ধান্ত ২: কোনো ত্রিভুজ ও কোনো সামান্তরিক সমান সমান ভূমি ও একই সমান্তরালযুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হবে।

উপপাদ্য ৩

একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফল সমান।



চিত্রে, $ABCD$ ও $ABEF$ সামান্তরিকক্ষেত্র দুইটি একই ভূমি AB এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল AB ও FC এর মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে যে, সামান্তরিক $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল = সামান্তরিক $ABEF$ এর ক্ষেত্রফল।

অঙ্কন: A, C ও A, E যোগ করি। C ও E বিন্দু থেকে ভূমি AB ও এর বর্ধিত রেখাংশের উপর EK ও CL লম্ব টানি।

প্রমাণ : ΔABC এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} AB \times CL$ এবং

ΔABE এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AB \times EK$

যেহেতু $CL = EK$, (অঙ্কনুসারে $AL \parallel FC$)

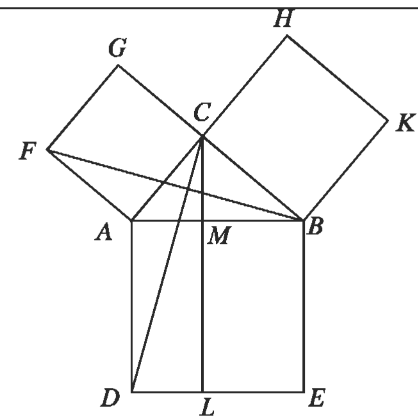
অতএব, ΔABC এর ক্ষেত্রফল = ΔABE এর ক্ষেত্রফল

$\Rightarrow \frac{1}{2}$ সামান্তরিক ক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ সামান্তরিক ক্ষেত্র $ABEF$ এর ক্ষেত্রফল

$\therefore$ সামান্তরিক ক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল = সামান্তরিক ক্ষেত্র $ABEF$ (প্রমাণিত।

উপপাদ্য ৪ (পিথাগোরাসের উপপাদ্য)

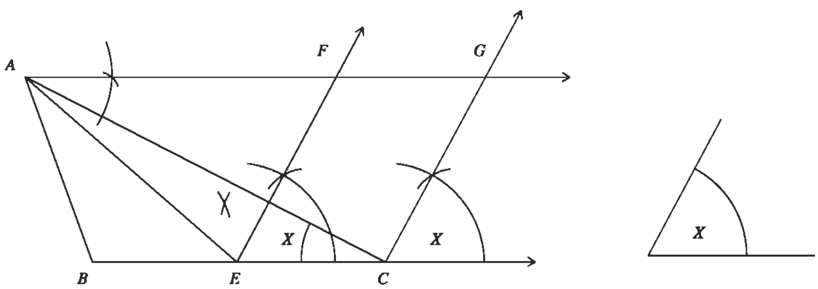
সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ACB$ সমকোণ এবং AB অতিভুজ। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = BC^2 + AC^2$. **অঙ্কন:** AB, AC এবং BC বাহুর উপর যথাক্রমে $ABED$, $ACGF$ এবং $BCHK$ বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করি। C বিন্দু দিয়ে AD বা BE রেখার সমান্তরাল CL রেখা আঁকি। মনেকরি, তা AB কে M বিন্দুতে এবং DE কে L বিন্দুতে ছেদ করে। C ও D এবং B ও F যোগ করি। **প্রমাণ:**	
ধাপ	**যথার্থতা**
(১) $\Delta\, CAD$ ও $\Delta\, FAB$ এ $CA = AF$, $AD = AB$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD$ $= \angle CAB + \angle CAF$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BAF$ অতএব, $\Delta\, CAD \cong \Delta\, FAB$	[$\angle BAD = \angle CAF = 1$ সমকোণ] [বাহু–কোণ–বাহু উপপাদ্য]
(২) ত্রিভুজক্ষেত্র CAD এবং আয়তক্ষেত্র $ADLM$ একই ভূমি AD এর উপর এবং AD ও CL সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং, আয়তক্ষেত্র $ADLM = 2$ (ত্রিভুজক্ষেত্র CAD)	

(৩) ত্রিভুজক্ষেত্র BAF এবং বর্গক্ষেত্র $ACGF$ একই ভূমি AF এর উপর এবং AF ও BG সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং, বর্গক্ষেত্র $ACGF = 2$ (ত্রিভুজক্ষেত্র FAB) $= 2$ (ত্রিভুজক্ষেত্র CAD)	[উপপাদ্য ১]
(৪) আয়তক্ষেত্র $ADLM$ = বর্গক্ষেত্র $ACGF$ (৫) অনুরূপভাবে C, E ও A, K যোগ করে প্রমাণ করা যায় যে, আয়তক্ষেত্র $BELM$ = বর্গক্ষেত্র $BCHK$	[উপপাদ্য ১]
(৬) আয়তক্ষেত্র ($ADLM + BELM$)= বর্গক্ষেত্র $ACGF$ + বর্গক্ষেত্র $BCHK$	[(২) এবং (৩) থেকে]
বা, বর্গক্ষেত্র $ABED$ = বর্গক্ষেত্র $ACGF$ + বর্গক্ষেত্র $BCHK$ অর্থাৎ, $AB^2 = BC^2 + AC^2$ [প্রমাণিত]	[(৪) এবং (৫) থেকে]

সম্পাদ্য ১

এমন একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে, যার একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র একটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।



মনে করি, ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজক্ষেত্র এবং $\angle x$ একটি নির্দিষ্ট কোণ। এরূপ সামান্তরিক আঁকতে হবে, যার একটি কোণ $\angle x$ এর **সমান** এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফলের সমান।

অঙ্কন : BC বাহুকে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করি। EC রেখাংশের E বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle CEF$ আঁকি। A বিন্দু দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল AG রশ্মি টানি এবং মনে করি তা EF রশ্মিকে F বিন্দুতে ছেদ করে। C বিন্দু দিয়ে EF রেখাংশের সমান্তরাল CG রশ্মি টানি এবং মনে করি তা AG রশ্মিকে G বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $ECGF$ ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ : A, E যোগ করি।

এখন, Δ ক্ষেত্র ABE এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র AEC এর ক্ষেত্রফল [যেহেতু ভূমি BE = ভূমি EC এবং উভয়ের একই উচ্চতা]

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল = 2 (Δ ক্ষেত্র AEC এর ক্ষেত্রফল)

আবার, সামান্তরিক ক্ষেত্র $ECGF$ এর ক্ষেত্রফল 2(Δ ক্ষেত্র AEC এর ক্ষেত্রফল) [যেহেতু, উভয়ে একই ভূমি EC এর উপর অবস্থিত এবং $EC \parallel AG$

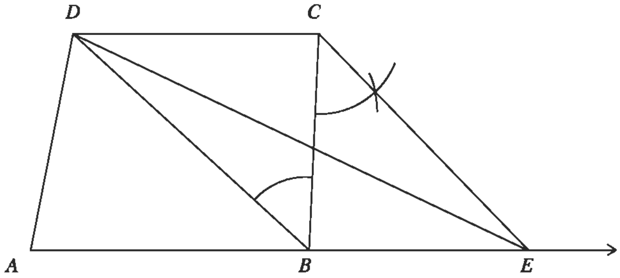
$\therefore$ সামান্তরিক ক্ষেত্র $ECGF$ এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল

আবার, . $\angle CEF = \angle x$ [যেহেতু $EF \parallel CG$, অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore$ সামান্তরিক $ECGF$ ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

সম্পাদ্য ২

এমন একটি ত্রিভুজ আঁকতে হবে যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।



মনে করি, $ABCD$ একটি চতুর্ভুজক্ষেত্র। এরূপ একটি ত্রিভুজ আঁকতে হবে যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $ABCD$ চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

অঙ্কন : D, B যোগ করি। C বিন্দু দিয়ে $CE \parallel DB$ টানি। মনে করি, তা AB বাহুর বর্ধিতাংশকে E বিন্দুতে ছেদ করে। D, E যোগ করি।

তাহলে, ΔDAE ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : BD ভূমির উপর ΔBDC ও ΔBDE অবস্থিত এবং $DB \parallel CE$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র BDC এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র BDE এর ক্ষেত্রফল

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র BDC এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র ABD এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র BDE এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র ABD এর ক্ষেত্রফল।

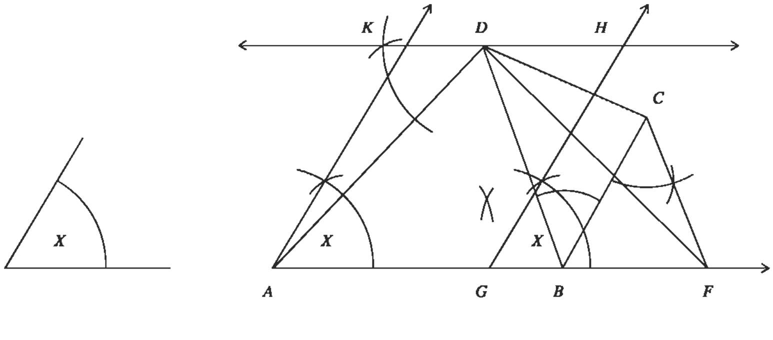
$\therefore$ চতুর্ভুজক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র ADE এর ক্ষেত্রফল।

অতএব, ΔADE ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : উপরের পদ্ধতির সাহায্যে নির্দিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট অসংখ্য ত্রিভুজক্ষেত্র আঁকা যাবে।

সম্পাদ্য ৩

এমন একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে যার একটি কোণ দেওয়া আছে এবং তা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।



মনে করি, $ABCD$ একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্র এবং $\angle x$ একটি নির্দিষ্ট কোণ। এরূপ একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে যার একটি কোণ প্রদত্ত $\angle x$ এর সমান এবং সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $ABCD$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

অঙ্কন : B, D যোগ করি। C বিন্দু দিয়ে $CF \parallel DB$ টানি এবং মনে করি, CF, AB বাহুর বর্ধিতাংশকে F বিন্দুতে ছেদ করে। AF রেখাংশের মধ্যবিন্দু G নির্ণয় করি। AG রেখাংশের A বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle GAK$ আঁকি এবং G বিন্দু দিয়ে $GH \parallel AK$ টানি। D বিন্দু দিয়ে $KDH \parallel AG$ টানি এবং মনে করি, তা AK ও GH কে যথাক্রমে K ও H বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, $AGHK$ ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ : D, F যোগ করি। $AGHK$ একটি সামান্তরিক [অঙ্কন অনুসারে]

যেখানে, $\angle GAK = \angle x$ আবার, Δ ক্ষেত্র DAF এর ক্ষেত্রফল = চতুর্ভুজক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল এবং সামান্তরিক ক্ষেত্র $AGHK$ এর ক্ষেত্রফল = ত্রিভুজক্ষেত্র DAF এর ক্ষেত্রফল।

অতএব, $AGHK$ ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

অনুশীলনী ১৫

১। ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে; নিচের কোন্ ক্ষেত্রে সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়?

ক. 3 cm, 4 cm, 5 cm খ. 6 cm, 8 cm, 10 cm

গ. 5 cm, 7 cm, 9 cm ঘ. 5 cm, 12 cm, 13 cm

২। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর:

i প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল রয়েছে

ii দুইটি ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম

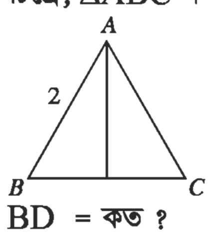
iii দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে তাদের ক্ষেত্রফল সমান

নিচের কোন্টি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. i ও iii

গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের চিত্রে, ΔABC সমবাহু, $AD \perp BC$ এবং $AB=2$ তথ্যের ভিত্তিতে (৩ ও ৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



৩। BD = কত ?

ক. 1 খ. $\sqrt{2}$

গ. 2 ঘ. 4

৪। ত্রিভুজটির উচ্চতা কত ?

ক. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ ব. একক খ. $\sqrt{3}$ ব. একক

গ. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ব. একক ঘ. $2\sqrt{3}$ ব. একক

৫। প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিকক্ষেত্রটিকে চারটি সমান ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

৬। প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্র তার কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক।

৭। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমা ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

৮। একটি সামান্তরিকক্ষেত্রের এবং সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমির উপর এবং এর একই পাশে অবস্থিত। দেখাও যে, সামান্তরিকক্ষেত্রটির পরিসীমা আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

৯। ΔABC এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y .

প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র AXY এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)।

১০। চিত্রে, $ABCD$ একটি ট্রাপিজিয়াম। এর AB ও CD বাহু দুইটি সমান্তরাল। ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১১। সামান্তরিক $ABCD$ এর অভ্যন্তরে P যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র PAB এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র PCD এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল)

১২। ΔABC এ BC ভূমির সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র DBC = Δ ক্ষেত্র EBC এবং Δ ক্ষেত্র DBF = Δ ক্ষেত্র CDE .

১৩। ABC ত্রিভুজের $\angle A$ = এক সমকোণ। D, AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু।

প্রমাণ কর যে, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$.

১৪। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং AD, BC এর ওপর লম্ব।

দেখাও যে, $4AD^2 = 3AB^2$.

১৫। ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC এর অতিভুজ এবং P, BC এর ওপর যেকোনো বিন্দু।

প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$.

১৬। ΔABC এর $\angle C$ স্থূলকোণ ; AD, BC এর ওপর লম্ব। দেখাও যে,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD.$

১৭। ΔABC এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ ; AD, BC এর ওপর লম্ব। দেখাও যে,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD.$

১৮। ΔABC এর AD একটি মধ্যমা। দেখাও যে,

$AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$

ষষ্ঠদশ অধ্যায়

পরিমিতি

(Mensuration)

ব্যবহারিক প্রয়োজনে, রেখার দৈর্ঘ্য, তলের ক্ষেত্রফল, ঘনবস্তুর আয়তন ইত্যাদি পরিমাপ করা হয়। এ রকম যেকোনো রাশি পরিমাপের ক্ষেত্রে একই জাতীয় নির্দিষ্ট পরিমাণের একটি রাশিকে একক হিসাবে গ্রহণ করা হয়। পরিমাপকৃত রাশি এবং এরূপ নির্ধারিত এককের অনুপাতই রাশিটির পরিমাপ নির্ধারণ করে।

অর্থাৎ পরিমাপ = $\dfrac{\text{পরিমাপকৃত রাশি}}{\text{একক রাশি}}$

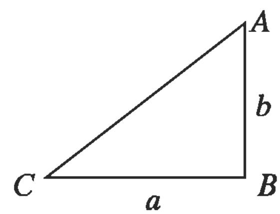
নির্ধারিত একক সম্পর্কে প্রত্যেক পরিমাপ একটি সংখ্যা যা পরিমাপকৃত রাশিটির একক রাশির কতগুণ তা নির্দেশ করে। যেমন, বেঞ্চটি 5 মিটার লম্বা। এখানে মিটার একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য যাকে একক হিসাবে ধরা হয়েছে এবং যার তুলনায় বেঞ্চটি 5 গুণ লম্বা।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- ত্রিভুজক্ষেত্র ও চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সূত্র প্রয়োগ করে বহুভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় এবং এতদসম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- বৃত্তের পরিধি ও বৃত্তাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবে।
- বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে।
- বৃত্তক্ষেত্র ও তার অংশবিশেষের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে এতদসম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- আয়তাকার ঘনবস্তু, ঘনক ও বেলনের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে এবং এ সম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- সুষম ও যৌগিক ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে।

১৬·১ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

পূর্বের শ্রেণিতে আমরা জেনেছি, ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\dfrac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা



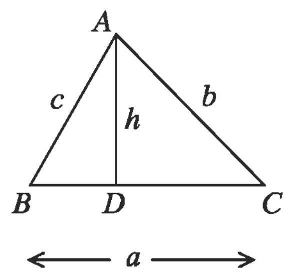
(১) **সমকোণী ত্রিভুজ :** মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় যথাক্রমে $BC = a$ এবং $AB = b$। BC কে ভূমি এবং AB কে উচ্চতা বিবেচনা করলে,

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2}ab$

(২) ত্রিভুজক্ষেত্রের দুই বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে। মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহুদ্বয় $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$। A থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব আঁকি।

ধরি, উচ্চতা $AD = h$।



কোণ C বিবেচনা করলে পাই, $\frac{AD}{CA} = \sin C$

বা, $\frac{h}{b} = \sin C$ বা, $h = b\sin C$

Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}BC \times AD$

$= \frac{1}{2}a \times b\sin C$

$= \frac{1}{2}ab\sin C$

অনুরূপভাবে Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}bc\sin A$

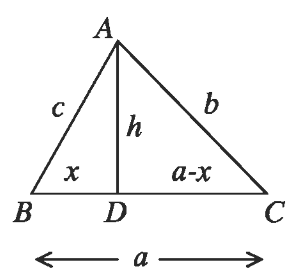
$= \frac{1}{2}ca\sin B$

(৩) ত্রিভুজের তিনবাহু দেওয়া আছে। মনে করি, ΔABC এর $BC = a$, $CA = b$ এবং $AB = c$।

$\therefore$ এর পরিসীমা $2s = a + b + c$

$AD \perp BC$ আঁকি।

ধরি, $BD = x$ তাহলে, $CD = a - x$



ΔABD এবং ΔACD সমকোণী

$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2$ এবং $AD^2 = AC^2 - CD^2$

$\therefore AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$

বা, $c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2$

বা, $c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$

বা, $2ax = c^2 + a^2 - b^2$

$\therefore x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$

আবার, $AD^2 = c^2 - x^2$

$$= c^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)^2$$

$$= \left(c + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)$$

$$= \frac{2ac + c^2 + a^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{2ac - c^2 - a^2 + b^2}{2a}$$

$$= \frac{\{(c+a)^2 - b^2\}\{b^2 - (c-a)^2\}}{4a^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b+c-2b)(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)}{4a^2}$$

$$= \frac{2s(2s-2b)(2s-2a)(2s-2c)}{4a^2}$$

$$= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$

$\therefore\ AD = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} BC \cdot AD$

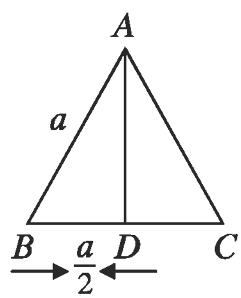
$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(b-c)}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(৪) সমবাহু ত্রিভুজ :

মনে করি, ABC সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a

$AD \perp BC$ আঁকি। $\therefore\ BD = CD = \frac{a}{2}$



ΔABD সমকোণী

$\therefore\ BD^2 + AD^2 = AB^2$

বা, $AD^2 = AB^2 - BD^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

$\therefore\ AD = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

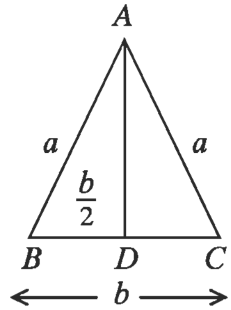
Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \text{ বা, } \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

(৫) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ :

মনে করি, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $AB = AC = a$

এবং $BC = b$



$AD \perp BC$ আঁকি। $\therefore \; BD = CD = \frac{b}{2}$

ΔABD সমকোণী

$$\therefore \quad AD^2 = AB^2 - BD^2 = a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{4a^2 - b^2}{4}$$

$$\therefore \quad AD = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$$

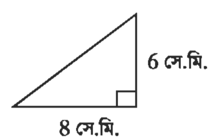
সমদ্বিবাহু Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD$

$$= \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$$

$$= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$$

উদাহরণ ১। একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি. ও 8 সে.মি. হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় যথাক্রমে $a = 8$ সে.মি. এবং $b = 6$ সে.মি.।



$\therefore$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}ab$

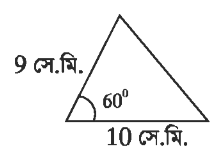
$= \frac{1}{2} \times 8 \times 6$ বর্গ সে.মি. = 24 বর্গ সে.মি.।

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 24 বর্গ সে.মি.।

উদাহরণ ২। কোনো ত্রিভুজের দুই বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 9 সে.মি. ও 10 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° । ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ত্রিভুজের বাহুদ্বয় যথাক্রমে $a = 9$ সে.মি. ও $b = 10$ সে.মি. এবং

এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\theta = 60^\circ$ ।



$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}ab\sin 60^o$

$= \frac{1}{2} \times 9 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ বর্গ সে.মি.

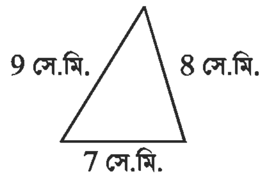
$= 38 \cdot 97$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $38 \cdot 97$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

উদাহরণ ৩। একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সে.মি., 8 সে.মি. ও 9 সে.মি.। এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ত্রিভুজটির বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $a=7$ সে.মি., $b=8$ সে.মি. এবং $c=9$ সে.মি.

$\therefore$ অর্ধপরিসীমা $s=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{7+8+9}{2}$ সে.মি. = 12 সে.মি.



$\therefore$ এর ক্ষেত্রফল = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

= $\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}$ বর্গ সে.মি.

= $\sqrt{12\times5\times4\times3}$ বর্গ সে.মি. = $\sqrt{720}$ বর্গ সে. মি. = 26.83 বর্গ সে.মি.

$\therefore$ ত্রিভুজটি ক্ষেত্রফল 26.83 বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

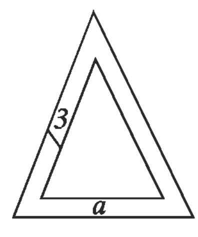
উদাহরণ ৪। একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 1 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রফল $3\sqrt{3}$ বর্গমিটার বেড়ে যায়। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a মিটার।

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল = $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ বর্গমিটার।

ত্রিভুজটির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 1 মিটার বাড়ালে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল = $\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a+1)^2$ বর্গমিটার।

প্রশ্নানুসারে, $\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a+1)^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=3\sqrt{3}$



বা, $(a+1)^2-a^2=12$; [$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $a^2+2a+1-a^2=12$ বা, $2a=11$ বা, $a=5\cdot5$

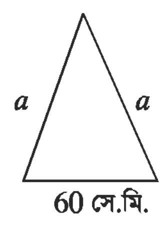
নির্ণেয় বাহুর দৈর্ঘ্য $5\cdot5$ মিটার।

উদাহরণ ৫। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য 60 সে.মি.। এর ক্ষেত্রফল 1200 বর্গ সে.মি. হলে, সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি $b=60$ সে.মি. এবং সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য a ।

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল = $\dfrac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}$

প্রশ্নানুসারে, $\dfrac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}=1200$



বা, $\dfrac{60}{4}\sqrt{4a^2-(60)^2}=1200$

বা, $15\sqrt{4a^2-3600}=1200$

বা, $\sqrt{4a^2 - 3600} = 80$

বা, $4a^2 - 3600 = 6400$; বর্গ করে

বা, $4a^2 = 10000$

বা, $a^2 = 2500$

$\therefore\ a = 50$

$\therefore$ ত্রিভুজটির সমান বাহুর দৈর্ঘ্য 50 সে.মি.।

উদাহরণ ৬। একটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে দুইটি রাস্তা 120^o কোণে চলে গেছে। দুইজন লোক ঐ নির্দিষ্ট স্থান থেকে যথাক্রমে ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার ও ঘণ্টায় 8 কিলোমিটার বেগে বিপরীত দিকে রওনা হলো। 5 ঘণ্টা পরে তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, A স্থান থেকে দুইজন লোক যথাক্রমে ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার ও ঘণ্টায় 8 কিলোমিটার বেগে রওনা হয়ে 5 ঘণ্টা পর B ও C স্থানে পৌঁছিল। তাহলে, 5 ঘণ্টা পর তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব হবে BC.

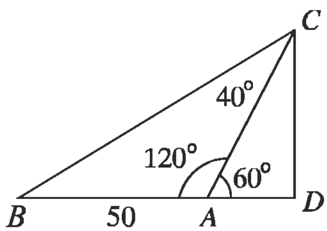
C থেকে BA এর বর্ধিতাংশের ওপর CD লম্ব টানি।

$\therefore\ AB = 5 \times 10$ কিলোমিটার = 50 কিলোমিটার, $AC = 5 \times 8$ কিলোমিটার = 40 কিলোমিটার

এবং $\angle BAC = 120^o$

$\therefore\ \angle BAC = 180^o - 120^o = 60^o$

ACD সমকোণী



$\therefore\ \dfrac{CD}{AC} = \sin 60^o$ বা, $CD = AC\sin 60^o = 40 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$

এবং $\dfrac{AD}{AC} = \cos 60^o$ বা, $AD = AC\cos 60^o = 40 \times \dfrac{1}{2} = 20$

আবার, সমকোণী ত্রিভুজ BCD থেকে পাই,

$BC^2 = BD^2 + CD^2 = (BA + AD)^2 + CD^2$

$= (50 + 20)^2 + (20\sqrt{3})^2 = 4900 + 1200 = 6100$

$\therefore\ BC = 78 \cdot 1$ (প্রায়)

নির্ণেয় দূরত্ব $78 \cdot 1$ কিলোমিটার (প্রায়)

উদাহরণ ৭। একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 25 একক, 20 একক ও 15 একক। বৃহত্তর বাহুর বিপরীত শীর্ষবিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্ব ত্রিভুজটিকে যে দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে তাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

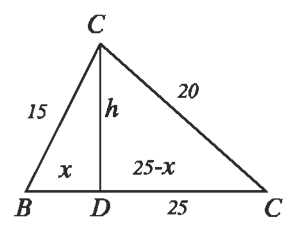
সমাধান : মনে করি, ABC ত্রিভুজের $BC = 25$ একক, $AC = 20$ একক, $AB = 15$ একক।

A শীর্ষবিন্দু থেকে BC বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব AD ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে ΔABD ও ΔACD ক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

ধরি, $BD = x$ এবং $AD = h$

$\therefore\ CD = BC - BD = 25 - x$

ΔABD সমকোণী –এ



$BD^2 + AD^2 = AB^2$ বা, $x^2 + h^2 = (15)^2$

$\therefore\ x^2 + h^2 = 225..........(i)$

এবং ΔACD সমকোণী

$CD^2 + AD^2 = AC^2$ বা, $(25 - x)^2 + h^2 = (20)^2$

বা, $625 - 50x + x^2 + h^2 = 400$

বা, $625 - 50x + 225 = 400$; সমীকরণ (i) এর সাহায্যে

বা, $50x = 450 \quad \therefore\ x = 9$

সমীকরণ (i) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$81 + h^2 = 225$ বা, $h^2 = 144$; $\quad \therefore\ h = 12$

Δ ক্ষেত্র ABD এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} BD.AD = \frac{1}{2} \times 9 \times 12$ বর্গএকক = 54 বর্গএকক

এবং Δ ক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} CD \cdot AD = \frac{1}{2}(25 - 9) \times 12$ বর্গএকক

= $\frac{1}{2} \times 16 \times 12$ বর্গএকক = 96 বর্গএকক

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 54 বর্গএকক এবং 96 বর্গএকক।

অনুশীলনী ১৬·১

১। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 25 মিটার। এর একটি বাহু অপরটির $\frac{3}{4}$ অংশ হলে, বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২। 20 মিটার লম্বা একটি মই দেওয়ালের সাথে খাড়াভাবে আছে। মইটির গোড়া দেওয়াল থেকে কত দূরে সরালে ওপরের প্রান্ত 4 মিটার নিচে নামবে।

৩। একট সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা 16 মিটার। এর সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য ভূমির $\frac{5}{6}$ অংশ হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৪। একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 25 সে.মি., 27 সে.মি. এবং পরিসীমা 84 সে.মি.। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৫। একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 2 মিটার বাড়ালে এর ক্ষেত্রফল $6\sqrt{3}$ বর্গমিটার বেড়ে যায়। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৬। একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 26 মিটার, 28 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 182 বর্গমিটার হলে, বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

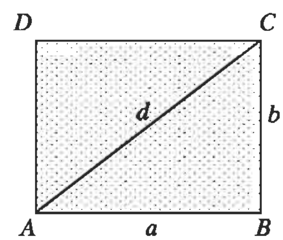
৭। একটি সমকোণী ত্রিভুজের লম্ব ভূমির $\frac{11}{12}$ অংশ থেকে 6 সে.মি. কম এবং অতিভুজ ভূমির $\frac{4}{3}$ অংশ থেকে 3 সে.মি. কম। ত্রিভুজটির ভূমির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৮। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য 10 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 48 বর্গমিটার হলে, ভূমির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৯। একটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে দুইটি রাস্তা পরস্পর 135^o কোণ করে দুইদিকে চলে গেছে। দুইজন লোক ঐ নির্দিষ্ট স্থান থেকে যথাক্রমে ঘণ্টায় 7 কিলোমিটার ও ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার বেগে বিপরীত মুখে রওনা হলো। 4 ঘণ্টা পর তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব নির্ণয় কর।

১০। একটি সমবাহু ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু থেকে তিনটির ওপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি., 7 সে.মি. ও 8 সে.মি.। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১৬·২ চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



(১) আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

মনে করি, $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $AB = a$

প্রস্থ $BC = b$ এবং কর্ণ $AC = d$

আমরা জানি, আয়তক্ষেত্রের কর্ণ আয়তক্ষেত্রটিকে সমান দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

$\therefore$ আয়তক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= 2\times\Delta$ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল

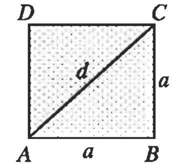
$= 2\times\frac{1}{2}a\cdot b = ab =$ দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ

লক্ষ করি, আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা $s = 2(a+b)$

এবং ABC ত্রিভুজটি সমকোণী

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$ বা, $d^2 = a^2 + b^2$; $\therefore d = \sqrt{a^2+b^2}$

(২) বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



মনে করি, $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a এবং কর্ণ d

AC কর্ণ বর্গক্ষেত্রটিকে সমান দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

$\therefore$ বর্গক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= 2\times\Delta$ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল

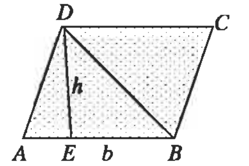
$= 2\times\frac{1}{2}a\cdot a = a^2 =$ (বাহুর দৈর্ঘ্য)^২

লক্ষ করি. বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা $s = 4a$

এবং কর্ণ $d = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$

(৩) সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

(ক) ভূমি ও উচ্চতা দেওয়া আছে।



মনে করি, $ABCD$ সামান্তরিকক্ষেত্রের ভূমি $AB = b$

এবং উচ্চতা $DE = h$

BD কর্ণ সামান্তরিকক্ষেত্রটিকে সমান দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

$\therefore$ সামান্তরিকক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল = $2\times\Delta$ ক্ষেত্র ABD এর ক্ষেত্রফল

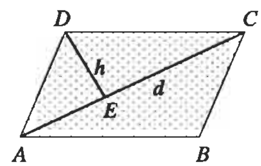
$$= 2\times\frac{1}{2}b\cdot h$$

$$= bh$$

(খ) একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য এবং ঐ কর্ণের বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে উক্ত কর্ণের ওপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে।

মনে করি, $ABCD$ সামান্তরিকক্ষেত্রের কর্ণ $AC = d$ এবং এর বিপরীত কৌণিক বিন্দু D থেকে AC এর উপর অঙ্কিত লম্ব $DE = h$। কর্ণ AC সামান্তরিকক্ষেত্রটিকে সমান দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

$\therefore$ সামান্তরিকক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল = $2\times\Delta$ ক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল



$$= 2\times\frac{1}{2}d\cdot h$$

$$= dh$$

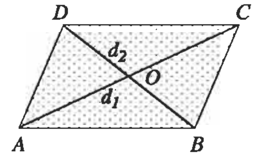
(৪) রম্বসের ক্ষেত্রফল

রম্বসের দুইটি কর্ণ দেওয়া আছে।

মনে করি, $ABCD$ রম্বসের কর্ণ $AC = d_1$, কর্ণ $BD = d_2$ এবং কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

কর্ণ AC রম্বসক্ষেত্রটিকে সমান দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

আমরা জানি, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে



$\therefore$ ΔACD এর উচ্চতা = $\frac{d_2}{2}$

$\therefore$ রম্বস $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল = $2\times\Delta$ ক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল

$$= 2\times\frac{1}{2}d_1\times\frac{d_2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}d_1d_2$$

(৫) ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের সমান্তরাল দুইটি বাহু এবং এদের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব দেওয়া আছে।

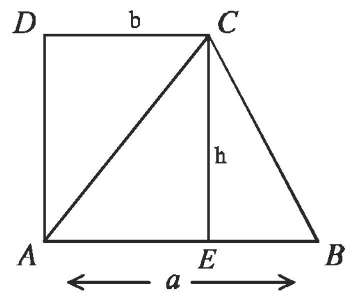
মনে করি, $ABCD$ ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $AB = a$ একক, $CD = b$ একক এবং এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব $CE = AF = h$ । AC কর্ণ ট্রাপিজিয়াম $ABCD$ ক্ষেত্রটিকে ΔABC ও ΔACD ক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল

$= \Delta$ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}AB \times CE + \frac{1}{2}CD \times CE$$

$$= \left(\frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh\right) = \frac{1}{2}h(a+b)$$



উদাহরণ ১। একটি আয়তাকার ঘরের দৈর্ঘ্য প্রস্থের $\frac{3}{2}$ গুণ। এর ক্ষেত্রফল 384 বর্গমিটার হলে, পরিসীমা ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, আয়তাকার ঘরের প্রস্থ x মিটার।

$\therefore$ ঘরের দৈর্ঘ্য $\frac{3x}{2}$ মিটার

এবং ক্ষেত্রফল $\frac{3x}{2} \times x$ বা, $\frac{3x^2}{2}$ বর্গমিটার।

প্রশ্নানুসারে, $\frac{3x^2}{2} = 384$ বা, $3x^2 = 768$ বা, $x^2 = 256$ $\therefore$ $x = 16$ মিটার

$\therefore$ আয়তাকার ঘরটির দৈর্ঘ্য = $\frac{3}{2} \times 16$ মিটার = 24 মিটার

এবং প্রস্থ = 16 মিটার।

$\therefore$ ঘরটির পরিসীমা = $2(24+16)$ মিটার = 80 মিটার

এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{(24)^2 + (16)^2}$ মিটার = $\sqrt{832}$ মিটার = $28 \cdot 84$ মিটার (প্রায়)

নির্ণেয় পরিসীমা 80 মিটার এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $28 \cdot 84$ মিটার (প্রায়)।

উদাহরণ ২। একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 2000 বর্গমিটার। যদি এর দৈর্ঘ্য 10 মিটার কম হত তাহলে এটি একটি বর্গক্ষেত্র হত। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য x মিটার এবং প্রস্থ y মিটার।

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = xy বর্গমিটার।

প্রশ্নানুসারে, $xy = 2000$................(1)

এবং $x-10=y$.............(2)

সমীকরণ (2) থেকে পাই, $y=x-10$.............(3)

সমীকরণ (1) এ $y=x-10$ বসিয়ে পাই

$x(x-10)=2000$ বা, $x^2-10x-2000=0$

বা, $x^2-50x+40x-2000=0$ বা, $(x-50)(x+40)=0$

$\therefore$ $x-50=0$ অথবা $x+40=0$

বা, $x=50$ অথবা $x=-40$

কিন্তু দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore$ $x=50$

এখন, সমীকরণ (3) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$y=50-10=40$

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য 50 মিটার এবং প্রস্থ 40 মিটার।

উদাহরণ ৩। বর্গাকার একটি মাঠের ভিতরে চারদিকে 4 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। যদি রাস্তার ক্ষেত্রফল 1 হেক্টর হয়, তবে রাস্তা বাদে মাঠের ভিতরের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বর্গাকার মাঠের দৈর্ঘ্য x মিটার।

$\therefore$ এর ক্ষেত্রফল x^2 বর্গমিটার।

মাঠের ভিতরে চারদিকে 4 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে।

$\therefore$ রাস্তা বাদে বর্গাকার মাঠের দৈর্ঘ্য = $(x-2\times4)$ বা $(x-8)$ মিটার।

$\therefore$ রাস্তা বাদে বর্গাকার মাঠের ক্ষেত্রফল = $(x-8)^2$ বর্গমিটার

সুতরাং রাস্তার ক্ষেত্রফল = $\{x^2-(x-8)^2\}$ বর্গমিটার

আমরা জানি, 1 হেক্টর = 10000 বর্গমিটার

প্রশ্নানুসারে, $x^2-(x-8)^2=10000$

বা, $x^2-x^2+16x-64=10000$

বা, $16x=10064$

$\therefore$ $x=629$

রাস্তাবাদে বর্গাকার মাঠের ক্ষেত্রফল = $(629-8)^2$ বর্গমিটার

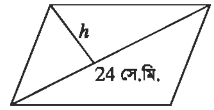
= 385641 বর্গমিটার

= $38\cdot56$ হেক্টর (প্রায়)

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $38\cdot56$ হেক্টর (প্রায়)।

উদাহরণ ৪। একটি সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 120 বর্গ সে.মি. এবং একটি কর্ণ 24 সে.মি.। কর্ণটির বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে উক্ত কর্ণের ওপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সামান্তরিকক্ষেত্রের একটি কর্ণ $d=24$ সে.মি. এবং এর বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে কর্ণের ওপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য h সে.মি.।



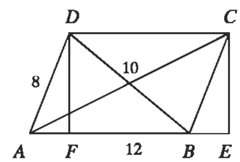
$\therefore$ সামান্তরিকক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = dh বর্গ সে.মি.

প্রশ্নানুসারে, $dh=120$ বা, $h=\frac{120}{d}=\frac{120}{24}=5$

নির্ণেয় লম্বের দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.।

উদাহরণ ৫। একটি সামান্তরিকের বাহুর দৈর্ঘ্য 12 মিটার ও 8 মিটার এবং ক্ষুদ্রতম কর্ণটি 10 মিটার হলে, অপর কর্ণটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $ABCD$ সামান্তরিকের $AB=a=12$ মিটার, $AD=c=8$ মিটার এবং কর্ণ $BD=b=10$ মিটার। D ও C থেকে AB এর উপর এবং AB এর বর্ধিতাংশের উপর DF ও CE লম্ব টানি। A, C ও B, D যোগ করি।



ΔABD এর অর্ধ পরিসীমা $s=\frac{12+10+8}{2}$ মিটার = 15 মিটার

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র ABD এর ক্ষেত্রফল $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{15(15-12)(15-10)(15-8)}$ বর্গমিটার

$=\sqrt{15\times3\times5\times7}$ বর্গমিটার

$=\sqrt{1575}$ বর্গমিটার

$=39\cdot68$ বর্গমিটার (প্রায়)।

আবার, Δ ক্ষেত্র ABD এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}AB\times DF$

বা, $39\cdot68=\frac{1}{2}\times12\times DF$ বা, $6DF=39\cdot68$ $\therefore DF=6\cdot61$

এখন, ΔBCE সমকোণী

$\therefore BE^2=BC^2-CE^2=AD^2-DF^2=8^2-(6\cdot61)^2=20\cdot31$

$\therefore BE=4\cdot5$

অতএব, $AE=AB+BE=12+4\cdot5=16\cdot5$

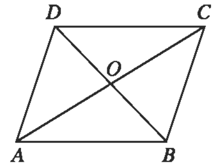
ΔBCE সমকোণী থেকে পাই,

$AC^2=AE^2-CE^2=(16\cdot5)^2-(6\cdot61)^2=315\cdot94$

$\therefore AC=17\cdot77$ (প্রায়)

নির্ণেয় কর্ণের দৈর্ঘ্য $17\cdot77$ মিটার (প্রায়)

উদাহরণ ৬। একটি রম্বসের একটি কর্ণ 10 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 120 বর্গমিটার হলে, অপর কর্ণ এবং পরিসীমা নির্ণয় কর।



সমাধান : মনে করি, $ABCD$ রম্বসের কর্ণ $BD = d_1 = 10$ মিটার

এবং অপর কর্ণ d_2 মিটার

$\therefore$ রম্বসটির ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}d_1d_2$ বর্গমিটার

প্রশ্নানুসারে, $\frac{1}{2}d_1d_2 = 120$ বা, $d_2 = \frac{120\times 2}{10} = \frac{120\times 2}{10} = 24$

আমরা জানি, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore$ $OD = OB = \frac{10}{2}$ মিটার = 5 মিটার এবং $OA = OC = \frac{24}{2}$ মিটার = 12 মিটার

এবং ΔAOD সমকোণী –এ

$\therefore AD^2 = OA^2 + OD^2 = (12)^2 + 5^2 \therefore AD = 13$

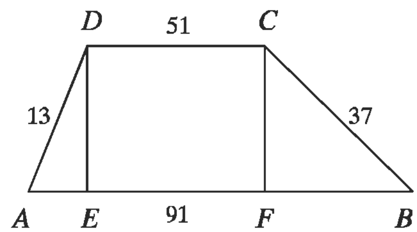
$\therefore$ রম্বসের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 13 মিটার।

$\therefore$ রম্বসের পরিসীমা = 4×13 মিটার = 52 মিটার।

নির্ণেয় কর্ণের দৈর্ঘ্য 24 মিটার এবং পরিসীমা 52 মিটার।

উদাহরণ ৭। একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 91 সে.মি. ও 51 সে.মি. এবং অপর বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 37 সে.মি. ও 13 সে.মি.। ট্রাপিজিয়ামটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $ABCD$ ট্রাপিজিয়ামের $AB = 91$ সে.মি., $CD = 51$ সে.মি.। D ও C থেকে AB এর উপর যথাক্রমে DE ও CF লম্বটানি।



$\therefore$ $CDEF$ একটি আয়তক্ষেত্র।

$\therefore$ $EF = CD = 51$ সে.মি.।

ধরি, $AE = x$ এবং $DE = CF = h$

$\therefore$ $BF = AB - AF = 91 - (AE + EF) = 91 - (x + 51) = 40 - x$

সমকোণী ΔADE থেকে পাই,

$AE^2 + DE^2 = AD^2$ বা, $x^2 + h^2 = (13)^2$ বা, $x^2 + h^2 = 169.........(i)$

আবার, সমকোণী এর ক্ষেত্রে ΔBCF

$BF^2 + CF^2 = BC^2$ বা, $(40 - x)^2 + h^2 = (37)^2$

বা, $1600 - 80x + x^2 + h^2 = 1369$

বা, $1600 - 80x + 169 = 1369$; (1) নং এর সাহায্যে

বা, $1600+169-1369 = 80x$; সমীকরণ (1) এর মান বসিয়ে পাই,

বা, $80x = 400$ $\therefore$ $x = 5$

সমীকরণ (1) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$5^2 + h^2 = 163$ বা, $h^2 = 169 - 25 = 144$ $\therefore$ $h = 12$

ট্রাপিজিয়াম $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(AB+CD)\cdot h$

$= \frac{1}{2}(91+51)\times 12$ বর্গ সে.মি.

$= 71\times 12$ বর্গ সে.মি.

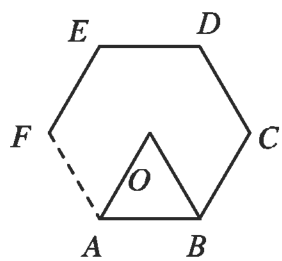
$= 852$ বর্গ সে.মি.

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 852 বর্গ সে.মি.।

১৬·৩ সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল :

সুষম বহুভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান। আবার কোণগুলো সমান। n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের কেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দুগুলো যোগ করলে n সংখ্যক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়।

সুতরাং বহুভুজের ক্ষেত্রফল = n × একটি ত্রিভুজ ক্ষেত্রেরক্ষেত্রফল।



ABCDEF .... একটি সুষমবাহু বহুভুজ, যার কেন্দ্র O.

n সংখ্যক বাহু এবং প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a.

O, A ; O, B যোগ করি।

ধরি, ΔAOB এর উচ্চতা $OA = h$ এবং $\angle OAB = \theta$

সুষম বহুভুজের প্রতিটি শীর্ষে উৎপন্ন কোণের পরিমাণ = 2θ

$\therefore$ n সংখ্যক সুষম বহুভুজের শীর্ষ কোণের সমষ্টি = $2\theta\, n$

সুষম বহুভুজের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের পরিমাণ = 4 সমকোণ

$\therefore$ n কোণের সমষ্টি $(2\theta\, n + 4)$ সমকোণ

ΔOAB এর তিনকোণের সমষ্টি = 2 সমকোণ

$\therefore$ এরূপ n সংখ্যক ত্রিভুজের কোণের সমষ্টি 2n সমকোণ

$\therefore$ $2\theta\cdot n + 4$ সমকোণ = 2n সমকোণ

বা, $2\theta\cdot n = (2n-4)$ সমকোণ

বা, $\theta = \frac{2n-4}{2n}$ সমকোণ

বা, $\theta = \left(1-\frac{2}{n}\right)\times 90^\circ$

$\therefore \quad \theta = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$

এখানে, $\tan\theta = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{2h}{a} \quad \therefore h = \frac{a}{2}\tan\theta$

ΔOAB এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\, a\, h$

$$= \frac{1}{2}\, a \times \frac{a}{2}\tan\theta$$

$$= \frac{a^2}{4}\tan\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right)$$

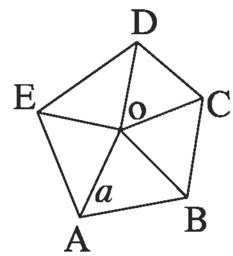
$$= \frac{a^2}{4}\cot\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \quad [\because \tan(90^\circ - A) = \cot A]$$

$\therefore$ n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{na^2}{4}\cot\left(\dfrac{180^\circ}{n}\right)$

উদাহরণ ৮। একটি সুষম পঞ্চভুজের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. হলে, এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সুষম পঞ্চভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 4$ সে.মি.

এবং বাহুর সংখ্যা $n = 5$



আমরা জানি, সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{na^2}{4}\cot\dfrac{180^\circ}{n}$

$\therefore$ সুষম পঞ্চভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{5\times 4^2}{4}\cot\dfrac{180^\circ}{5}$ বর্গ সে.মি.

$= 20\times\cot 36^\circ$ বর্গ সে.মি.

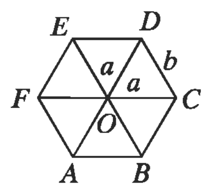
$= 20\times 1\cdot 376$ বর্গ সে.মি. (ক্যালকুলেটরের সাহায্যে)

$= 27\cdot 528$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $27\cdot 528$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

উদাহরণ ৯। একটি সুষম ষড়ভুজের কেন্দ্র থেকে কৌণিক বিন্দুর দূরত্ব 4 মিটার হলে, এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $ABCDEF$ একটি সুষম ষড়ভুজ। এর কেন্দ্র O থেকে শীর্ষবিন্দুগুলো যোগ করা হলো। ফলে 6 টি সমান ক্ষেত্রবিশিষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়।



$\therefore \angle COD = \dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

মনে করি, কেন্দ্র O থেকে শীর্ষবিন্দুগুলোর দূরত্ব a মিটার।

$\therefore \Delta$ ক্ষেত্র COD এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}a\cdot a\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}a^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2$ বর্গমিটার $= 4\sqrt{3}$ বর্গমিটার

সুষম ষড়ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= 6\times\Delta$ ক্ষেত্র COD এর ক্ষেত্রফল

$= 6\times 4\sqrt{3}$ বর্গমিটার

$= 24\sqrt{3}$ বর্গমিটার।

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $24\sqrt{3}$ বর্গমিটার

অনুশীলনী ১৬·২

১। একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য বিস্তারের দ্বিগুণ। এর ক্ষেত্রফল 512 বর্গমিটার হলে, পরিসীমা নির্ণয় কর।

২। একটি জমির দৈর্ঘ্য 80 মিটার এবং প্রস্থ 60 মিটার। ঐ জমির মাঝে একটি পুকুর খনন করা হলো। যদি পুকুরের প্রত্যেক পাড়ের বিস্তার 4 মিটার হয়, তবে পুকুরের পাড়ের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৩। একটি বাগানের দৈর্ঘ্য 40 মিটার এবং প্রস্থ 30 মিটার। বাগানের ভিতরে সমান পাড়বিশিষ্ট একটি পুকুর আছে। পুকুরের ক্ষেত্রফল বাগানের ক্ষেত্রফলের $\frac{1}{2}$ অংশ হলে, পুকুরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

৪। একটি বর্গাকার মাঠের বাইরে চারদিকে 5 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তার ক্ষেত্রফল 500 বর্গমিটার হলে, মাঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৫। একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমার সমান। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য প্রস্থের তিনগুণ এবং ক্ষেত্রফল 768 বর্গমিটার। প্রতিটি 40 সে.মি. বর্গাকার পাথর দিয়ে বর্গক্ষেত্রটি বাঁধতে মোট কতটি পাথর লাগবে?

৬। একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 160 বর্গমিটার। যদি এর দৈর্ঘ্য 6 মিটার কম হয়, তবে ক্ষেত্রটি বর্গাকার হয়। আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

৭। একটি সামান্তরিকের ভূমি উচ্চতার $\frac{3}{4}$ অংশ এবং ক্ষেত্রফল 363 বর্গমিটার হলে, ক্ষেত্রটির ভূমি ও উচ্চতা নির্ণয় কর।

৮। একটি সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের সমান। সামান্তরিকের ভূমি 125 মিটার এবং উচ্চতা 5 মিটার হলে, বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৯। একটি সামান্তরিকের বাহুর দৈর্ঘ্য 30 সে.মি. এবং 26 সে.মি.। এর ক্ষুদ্রতম কর্ণটি 28 সে.মি. হলে, অপর কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১০। একটি রম্বসের পরিসীমা 180 সে.মি. এবং ক্ষুদ্রতম কর্ণটি 54 সে.মি.। এর অপর কর্ণ এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১১। একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু দুইটির দৈর্ঘ্যের অন্তর 8 সে.মি. এবং তাদের লম্ব দূরত্ব 24 সে.মি.। যদি ট্রাপিজিয়াম দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১২। একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 31 সে.মি. ও 11 সেন্টিমিটার এবং অপর বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 10 সে.মি. ও 12 সে.মি.। এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

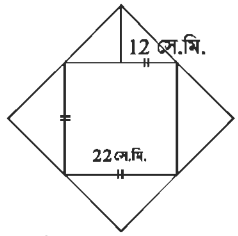
১৩। একটি সুষম অষ্টভুজের কেন্দ্র থেকে কৌণিক বিন্দুর দূরত্ব 1·5 মিটার হলে, এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১৪। আয়তাকার একটি ফুলের বাগানের দৈর্ঘ্য 150 মিটার এবং প্রস্থ 100 মিটার। বাগানটিকে পরিচর্যা করার জন্য ঠিক মাঝ দিয়ে 3 মিটার চওড়া দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর রাস্তা আছে।

(ক) উপরের তথ্যটি চিত্রের সাহায্যে সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দাও।

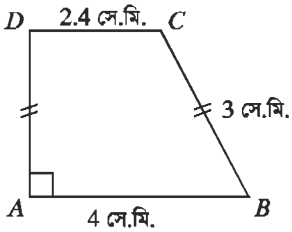
(খ) রাস্তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

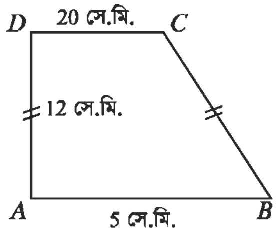
(গ) রাস্তাটি পাকা করতে 25 সে.মি. দৈর্ঘ্য এবং 12·5 সে. মি. প্রস্থবিশিষ্ট কয়টি ইটের প্রয়োজন হবে।

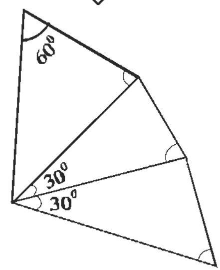


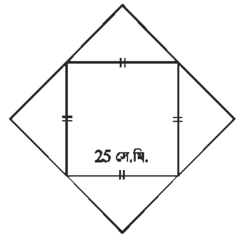
১৫। বহুভুজ চিত্রে তথ্য অনুসারে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১৬। নিচের চিত্রের তথ্য থেকে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

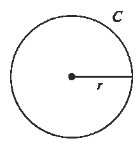








৬·৪ বৃত্ত সংক্রান্ত পরিমাপ



(১) বৃত্তের পরিধি

বৃত্তের দৈর্ঘ্যকে তার পরিধি বলা হয়। মনে করি, কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে, এর পরিধি $c = 2\pi\, r$ যেখানে $\pi = 3\cdot14159265$.......... একটি অমূলদ সংখ্যা। π এর আসল মান হিসেবে $3\cdot1416$ ব্যবহার করা যায়।

সুতরাং কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ জানা থাকলে π এর আসন্ন মান ব্যবহার করে বৃত্তের পরিধির আসন্ন মান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ ১। একটি বৃত্তের ব্যাস 26 সে.মি. হলে, এর পরিধি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাস = $2r$ এবং পরিধি = $2\pi\, r$

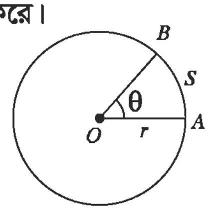
প্রশ্নানুসারে, $2r = 26$ বা, $r = \frac{26}{2}$ $\quad\therefore\ r = 13$ সে. মি.

$\therefore$ বৃত্তের পরিধি = $2\pi r$ = $2\times3\cdot1616\times13$ সে.মি. = $81\cdot64$ সে.মি.(প্রায়)

নির্ণেয় বৃত্তের পরিধি $81\cdot64$ সে.মি. (প্রায়)।

(২) বৃত্তাংশের দৈর্ঘ্য

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং $AB = s$ বৃত্তচাপ কেন্দ্রে θ^o কোণ উৎপন্ন করে।



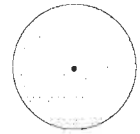
$\therefore$ বৃত্তের পরিধি = $2\pi r$

বৃত্তের কেন্দ্রে মোট উৎপন্ন কোণ = 360^o এবং চাপ s দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের ডিগ্রী পরিমাণ θ°

আমরা জানি, বৃত্তের কোনো চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।

$\therefore\ \frac{\theta}{360^\circ} = \frac{s}{2\pi r}$ বা, $s = \frac{\pi r\theta}{180}$

(৩) বৃত্তক্ষেত্র ও বৃত্তকলা ক্ষেত্রফল :



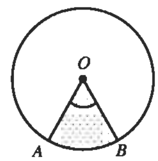
কোনো বৃত্ত দ্বারা বেষ্টিত এলাকাকে বৃত্তক্ষেত্র বলা হয় এবং বৃত্তটিকে এরূপ বৃত্তক্ষেত্রের সীমারেখা বলা হয়।

বৃত্তকলা : একটি চাপ ও চাপের প্রান্তবিন্দু সংশিষ্ট ব্যাসার্ধ দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রকে বৃত্তকলা বলা হয়।

O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের পরিধির ওপর A ও B দুইটি বিন্দু হলে $\angle AOB$ এর অভ্যন্তরে OA ও OB ব্যাসার্ধ এবং AB চাপের সংযোগে গঠিত একটি বৃত্তকলা।

পূর্বের শ্রেণিতে আমরা শিখে এসেছি যে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে, বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2

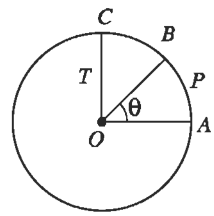
আমরা জানি, বৃত্তের কোনো চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।



সুতরাং এ পর্যায়ে আমরা স্বীকার করে নিতে পারি যে, একই বৃত্তের দুইটি বৃত্তাংশ ক্ষেত্র এবং এরা যে চাপ দুইটির উপর দণ্ডায়মান এদের পরিমাপ সমানুপাতিক।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r

AOB বৃত্তকলা ক্ষেত্রটি APB চাপের উপর দণ্ডায়মান, যার ডিগ্রী পরিমাপ θ । OA এবং উপর OC লম্ব টানি।



$$\therefore \frac{\text{বৃত্তকলা } AOB \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তকলা } AOC \text{ এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\angle AOB \text{ এর পরিমাপ}}{\angle ADC \text{ এর পরিমাপ}}$$

$$\text{বা, } \frac{\text{বৃত্তকলা } AOB \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তকলা } AOC \text{ এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\theta}{90}\ ; \quad [\because \angle AOC = 90^o]$$

$$\text{বা, বৃত্তকলা } AOB \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{\theta}{90} \times \text{ বৃত্তকলা } ADC \text{ এর ক্ষেত্রফল}$$

$$= \frac{\theta}{90} \times \frac{1}{4} \times \text{ বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}$$

$$= \frac{\theta}{90} \times \frac{1}{4} \times \pi r^2$$

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

সুতরাং, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

উদাহরণ ২। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 8 সে.মি. এবং একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 56^o কোণ উৎপন্ন করলে, বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য এবং বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 8$ সে.মি., বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য s এবং বৃত্তচাপ দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = 56°$।

আমরা জানি, $s = \frac{\pi r \theta}{180} = \frac{3 \cdot 1416 \times 8 \times 56}{180}$ সে.মি. = $7 \cdot 82$ সে.মি. (প্রায়)

এবং বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল = $\frac{\theta}{360^o} \times \pi r^2$

$$= \frac{56}{360} \times 3 \cdot 1416 \times 8^2 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

= 31.28 বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

উদাহরণ ৩। একটি বৃত্তের ব্যাস ও পরিধির পার্থক্য 90 সে.মি. হলে, বৃত্তের ব্যাস নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাস $= 2r$ এবং পরিধি $= 2\pi r$

প্রশ্নানুসারে, $2\pi r - 2r = 90$

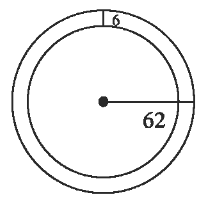
বা, $2r(\pi - 1) = 90$ বা, $r = \dfrac{90}{2(\pi - 1)} = \dfrac{45}{3\cdot1416 - 1} = 21\cdot01$ সে. মি. (প্রায়)

নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ 21.01 সে.মি. (প্রায়)।

উদাহরণ ৪। একটি বৃত্তাকার মাঠের ব্যাস 124 মিটার। মাঠের সীমানা ঘেঁষে 6 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বৃত্তাকার মাঠের ব্যাসার্ধ r এবং রাস্তাসহ বৃত্তাকার মাঠের ব্যাসার্ধ R ।

$\therefore$ $r = \dfrac{124}{2}$ মিটার $= 62$ মিটার এবং $R = (62 + 6)$ মিটার $= 68$ মিটার



বৃত্তাকার মাঠের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

এবং রাস্তাসহ বৃত্তাকার মাঠের ক্ষেত্রফল $= \pi R^2$

$\therefore$ রাস্তার ক্ষেত্রফল = রাস্তাসহ মাঠের ক্ষেত্রফল – মাঠের ক্ষেত্রফল

$= (\pi R^2 - \pi r^2) = \pi(R^2 - r^2)$

$= 3\cdot1416\{(68)^2 - (62)^2\}$ বর্গমিটার

$= 3\cdot1416(4624 - 3844)$ বর্গমিটার

$= 3\cdot1416 \times 780$ বর্গমিটার

$= 2450\cdot44$ বর্গমিটার (প্রায়)

নির্ণেয় রাস্তার ক্ষেত্রফল $2450\cdot44$ বর্গমিটার (প্রায়)।

কাজ : একটি বৃত্তের পরিধি 440 মিটার। ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উদাহরণ ৫। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 12 সে.মি. এবং বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য 14 সে.মি.। বৃত্তচাপটি কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 12$ সে.মি., বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $s = 14$ সে.মি. এবং কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের ডিগ্রী পরিমাণ θ ।

আমরা জানি, $s = \dfrac{\pi r\theta}{180}$

বা, $\pi r\theta = 180 \times s$

বা, $\theta = \dfrac{180 \times s}{\pi r} = \dfrac{180 \times 14}{3.1416 \times 12} = 66.85$ (প্রায়)

নির্ণেয় কোণ $66\cdot85^o$ (প্রায়)।

উদাহরণ ৬। একটি চাকার ব্যাস $4\cdot5$ মিটার। চাকাটি 360 মিটার পথ অতিক্রম করতে কত বার ঘুরবে ?

সমাধান : দেওয়া আছে, চাকার ব্যাস $4\cdot5$ মিটার

$\therefore$ চাকাটির ব্যাসার্ধ $r=\dfrac{4\cdot5}{2}$ মিটার এবং পরিধি $= 2\pi r$

মনে করি, চাকাটি 360 মিটার পথ অতিক্রম করতে n বার ঘুরবে।

প্রশ্নানুসারে, $n\times2\pi r=360$

বা, $n=\dfrac{360}{2\pi r}=\dfrac{360\times2}{2\times3\cdot1416\times4\cdot5}=28.46$ (প্রায়)

$\therefore$ চাকাটি প্রায় 25 বার ঘুরবে।

উদাহরণ ৭। 211 মিটার 20 সে.মি. যেতে দুইটি চাকা যথাক্রমে 32 এবং 48 বার ঘুরলো। চাকা দুইটির ব্যাসার্ধের অন্তর নির্ণয় কর।

সমাধান : 211 মিটার 20 সে.মি. $=$ 21120 সে.মি.

মনে করি, চাকা দুইটির ব্যাসার্ধ যথাক্রমে R ও r; যেখানে $R>r.$

$\therefore$ চাকা দুইটির পরিধি যথাক্রমে $2\pi R$ ও $2\pi r$ এবং ব্যাসার্ধের অন্তর $(R-r)$

প্রশ্নানুসারে, $32\times2\pi r=21120$

বা, $R=\dfrac{21120}{32\times2\pi}=\dfrac{21120}{32\times2\times3\cdot1416}=105\cdot04$ (প্রায়)

এবং $48\times2\pi r=21120$

বা, $r=\dfrac{21120}{48\times2\pi}=\dfrac{21120}{48\times2\times3\cdot1416}=70\cdot03$ (প্রায়)

$\therefore$ $R-r=(105\cdot04-70\cdot03)$ সে.মি. $=$ $35\cdot01$ সে.মি. $=$ $0\cdot35$ মি. (প্রায়)

$\therefore$ চাকা দুইটির ব্যাসার্ধের অন্তর $0\cdot35$ মিটার (প্রায়)।

উদাহরণ ৮। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 14 সে.মি.। একটি বর্গের ক্ষেত্রফল উক্ত বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমান। বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r=14$ সে.মি. এবং বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য a

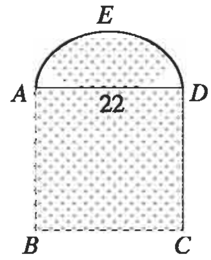
$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল πr^2 এবং বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $=$ a^2

প্রশ্নানুসারে, $a^2=\pi r^2$

বা, $a=\sqrt{\pi}r=\sqrt{3.1416}\times14=24.81$ (প্রায়)

নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $24\cdot81$ সে.মি. (প্রায়)।

উদাহরণ ৯। চিত্রে $ABCD$ একটি বর্গক্ষেত্র যার প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 22 মিটার এবং AED ক্ষেত্রটি একটি অর্ধবৃত্ত। সম্পূর্ণ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



সমাধান : মনে করি, $ABCD$ বর্গক্ষেত্রটির প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = a^2

আবার, AED একটি অধিবৃত্ত

$\therefore$ অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = \frac{22}{2}$ মিটার = 11 মিটার

সুতরাং, AED অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}\pi r^2$

$\therefore$ সম্পূর্ণ তলের ক্ষেত্রফল = $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + AED অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল

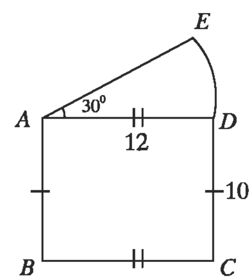
$$= \left(a^2 + \frac{1}{2}\pi r^2\right)$$

$$= \{(22)^2 + \frac{1}{2} \times 3\cdot1416 \times (11)^2 \text{ বর্গমিটার } = 674\cdot07 \text{ বর্গমিটার (প্রায়)}$$

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $674\cdot07$ বর্গমিটার (প্রায়)।

উদাহরণ ১০। চিত্রে $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র যার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 12 মিটার ও 10 মিটার এবং DAE একটি বৃত্তাংশ। বৃত্তা DE এর দৈর্ঘ্য এবং সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : বৃত্তাংশের ব্যাসটি $r = AD = 12$ মিটার এবং কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = 30^o$



$\therefore$ বৃত্তচাপ DE এর দৈর্ঘ্য = $\frac{\pi r\theta}{180}$

$$= \frac{3\cdot1416 \times 12 \times 30}{180} \text{ মিটার } = 6\cdot28 \text{ মিটার (প্রায়)}$$

ADE বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2 = \frac{30}{360} \times 3.1416 \times (12)^2$ বর্গমিটার

$$= 37\cdot7 \text{ বর্গমিটার (প্রায়)}$$

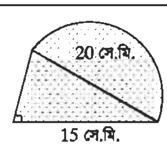
আয়তক্ষেত্র $ABCD$ এর দৈর্ঘ্য 12 মিটার এবং প্রস্থ 10 মিটার।

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ = 12 মিটার × 10 মিটার = 120 বর্গমিটার

$\therefore$ সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $(37\cdot7 + 120)$ বর্গমিটার = $157\cdot7$ বর্গমিটার

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $157\cdot7$ বর্গমিটার (প্রায়)।

কাজ : চিত্রে গাঢ় চিহ্নিত ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :



অনুশীলনী ১৬.৩

১। একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 30° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাস 126 সে.মি. হলে চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২। প্রতি মিনিটে 66 মিটার বেগে $1\frac{1}{2}$ মিনিটে একটি ঘোড়া কোনো মাঠ ঘুরে এলো। ঐ মাঠের ব্যাস নির্ণয় কর।

৩। একটি বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল 77 বর্গমিটার এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ 21 মিটার। বৃত্তচাপটি কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তা নির্ণয় কর।

৪। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 14 সে.মি. এবং বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 75° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৫। একটি বৃত্তাকার মাঠকে ঘিরে একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ভিতরের পরিধি অপেক্ষা বাইরের পরিধি 44 মিটার বড়। রাস্তাটির চওড়া নির্ণয় কর।

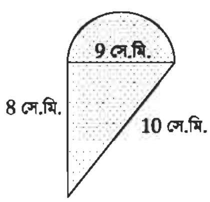
৬। একটি বৃত্তাকার পার্কের ব্যাস 26 মিটার। পার্কটিকে বেষ্টণ করে বাইরে 2 মিটার প্রশস্থ একটি পথ আছে। পথটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

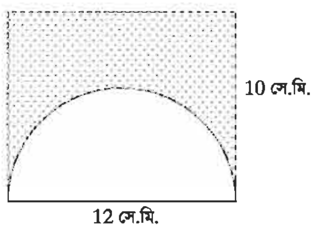
৭। একটি গাড়ির সামনের ব্যাস 28 সে.মি. এবং পিছনের চাকার ব্যাস 35 সে.মি.। 88 মিটার পথ যেতে সামনের চাকা পিছনের চাকা অপেক্ষা কত পূর্ণসংখ্যক বার বেশি ঘুরবে ?

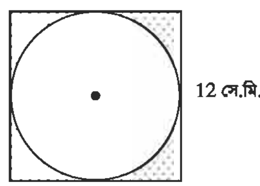
৮। একটি বৃত্তের পরিধি 220 মিটার। ঐ বৃত্তে অন্তলিখিত বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৯। একটি বৃত্তের পরিধি একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমানার সমান। এদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় কর।

১০। নিচের চিত্রের তথ্য অনুযায়ী গাঢ় চিহ্নিত ক্ষেত্রগুলোর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :







৬.৫ আয়তাকার ঘনবস্তু : বস্তু

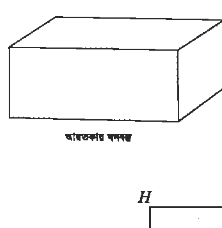
তিন জোড়া সমান্তরাল আয়তাকার সমতল বা পৃষ্ঠ দ্বারা আবদ্ধ ঘনবস্তুকে আয়তাকার ঘনবস্তু বলে।

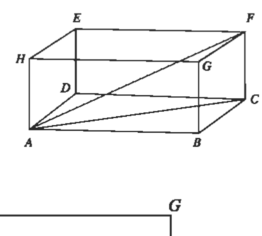
মনে করি, $ABCDEFGH$ একটি আয়তাকার ঘনবস্তু। এর দৈর্ঘ্য $AB = a$, প্রস্থ $BC = b$, উচ্চতা $AH = c$

(১) কর্ণ নির্ণয় : $ABCDEFGH$ আয়তাকার ঘনবস্তুর কর্ণ AF

ΔABC –এ $BC \perp AB$ এবং AC অতিভুজ।

$\therefore\ AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2$



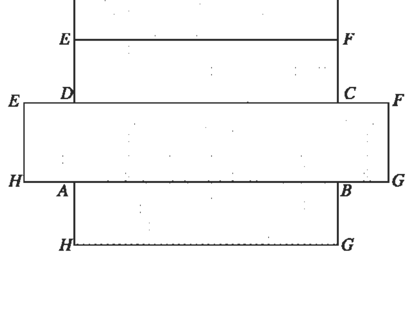


আবার, ΔACF এ $FC \perp AC$ এবং AF অতিভুজ।

$\therefore\ AF^2 = AC^2 + CF^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$\therefore\ AF = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$\therefore$ আয়তাকার ঘনবস্তুটির কর্ণ = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



(২) সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় :

আয়তকার ঘনবস্তুটির 6 টি তল

যেখানে, বিপরীত তলগুলো পরস্পর সমান।

আয়তাকার ঘনবস্তুটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল

$= 2(ABCD$ তলের ক্ষেত্রফল $+$ $ABGH$ তলের ক্ষেত্রফল $+$ $BCFG$ তলের ক্ষেত্রফল)

$= 2(AB \times AD + AB \times AH + BC \times BG)$

$= 2(ab + ac + bc)$

$= 2(ab + bc + ca)$

(৩) আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন = দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $\times$ উচ্চতা

$= abc$

উদাহরণ ১। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে, 25 সে.মি., 20 সে.মি. এবং 15 সে.মি.। এর সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল, আয়তন এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য $a = 25$ সে.মি., প্রস্থ $b = 20$ সে.মি. এবং উচ্চতা $c = 15$ সে.মি.।

$\therefore$ আয়তাকার ঘনবস্তুটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $= 2(ab + bc + ca)$

$= 2(25 \times 20 + 20 \times 15 + 15 \times 25)$ বর্গ সে.মি.

$= 2350$ বর্গ সে.মি.

আয়তন $= abc$

$= 25 \times 20 \times 15$ ঘন সে.মি.

$= 7500$ ঘন সে.মি.

এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$= \sqrt{(25)^2 + (20)^2 + (15)^2}$ সে.মি.

$= \sqrt{625 + 400 + 225}$ সে.মি.

$= \sqrt{1250}$ সে.মি.

$= 35 \cdot 363$ সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল 2350 বর্গ সে.মি., আয়তন 7500 ঘন সে.মি. এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 35.36 সে.মি. (প্রায়)।

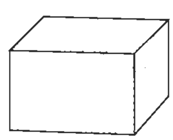
> **কাজ :** তোমার গণিত বইয়ের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা মেপে এর আয়তন, সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৬·৬ ঘনক :

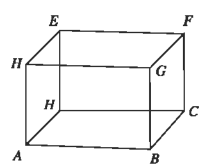
আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান তাকে ঘণক বলা হয়।

মনে করি, $ABCDEFGH$ একটি ঘণক।

এর দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = উচ্চতা = a একক



ঘনক



(১) ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$

(২) ঘনকের সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $= 2(a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a)$

$= 2(a^2 + a^2 + a^2) = 6a^2$

(৩) ঘনকটির আয়তন $= a \cdot a \cdot a = a^3$

উদাহরণ ২। একটি ঘনকের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 96 বর্গমিটার। এর কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ঘনকটির ধার a

$\therefore$ এর সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = $6a^2$ এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{3}a$

প্রশ্নানুসারে, $6a^2 = 96$ বা, $a^2 = 16$ $\quad\therefore\ a = 4$

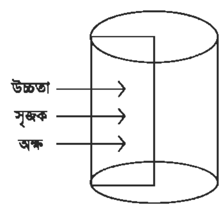
$\therefore$ ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{3}a$ = $\sqrt{3} \times a$ = $6\cdot928$ মিটার (প্রায়)

নির্ণেয় কর্ণের দৈর্ঘ্য $6\cdot928$ মিটার (প্রায়)।

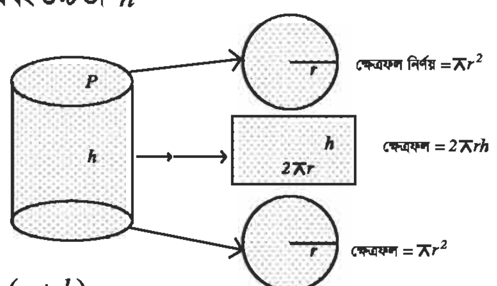
> **কাজ :** তিনটি ধাতব ঘনকের ধার যথাক্রমে 3 সে.মি., 4 সে.মি. ও 5 সে.মি.। ঘনক তিনটিকে গলিয়ে একটি নতুন ঘনক তৈরি করা হলো। নতুন ঘনকের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৬·৭ বেলন :

কোনো আয়তক্ষেত্রের যে কোনো বাহুকে অক্ষ ধরে আয়তক্ষেত্রটিকে ঐ বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তুর সৃষ্টি হয়, তাকে সমবৃত্তভূমিক বেলন বা সিলিন্ডার বলা হয়। সমবৃত্তভূমিক বেলনের দুই প্রান্তকে বৃত্তাকার তল, বক্রতলকে বক্রপৃষ্ঠ এবং সমগ্র তলকে পৃষ্ঠতল বলা হয়। আয়তক্ষেত্রের অক্ষের সমান্তরাল ঘূর্ণায়মান বাহুটিকে বেলনের সৃবক বা উৎপাদক রেখা বলে।



উপরের, চিত্রটি একটি সমবৃত্তভূমিক বেলন যার ভূমির ব্যাসার্ধ r এবং উচ্চতা h



(১) ভূমির ক্ষেত্রফল = πr^2

(২) বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল

= ভূমির পরিধি × উচ্চতা

= $2\pi rh$

(৩) সম্পূর্ণতলের ক্ষেত্রফল বা সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

বা, পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল = $(\pi r^2 + 2\pi rh + \pi r^2)$ = $2\pi r(r+h)$

(৪) আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

= $\pi r^2 h$

উদাহরণ ৩। একটি সমবৃত্তভূমিক বেলনের উচ্চতা 10 সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 7 সে.মি. হলে, এর আয়তন এবং সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সমবৃত্তভূমিক বেলনের উচ্চতা $h = 10$ সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ r

$\therefore$ এর আয়তন = $\pi r^2 h$ = $3\cdot1416 \times 7^2 \times 10$

= $1539\cdot38$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

এবং সমগ্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = $2\pi r(r+h)$

= $2 \times 3\cdot1416 \times 7(7+10)$ বর্গমিটার (প্রায়)

= $747\cdot7$ বর্গমিটার (প্রায়)

> **কাজ :** একটি আয়তাকার কাগজের পাতা মোড়ায়ে একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার তৈরি কর। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

উদাহরণ ৪। ঢাকনাসহ একটি বাক্সের বাইরের মাপ যথাক্রমে 10 সে.মি., 9 সে.মি. ও 7 সে.মি. এবং ভিতরের সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 262 বর্গ সে.মি.। এর দেওয়ালের পুরুত্ব সমান হলে, বাক্সের পুরুত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বাক্সেও পুরুত্ব x

ঢাকনাসহ বাক্সের বাইরের মাপ যথাক্রমে 10 সে.মি., 9 সে.মি. ও 7 সে.মি.

$\therefore$ বাক্সের ভিতরের মাপ যথাক্রমে $a=(10-2x)$, $b=(9-2x)$ ও $c=(7-2x)$ সে.মি.

$\therefore$ বাক্সের ভিতরের সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল = $2(ab+bc+ca)$

প্রশ্নানুসারে, $2(ab+bc+ca)=262$

বা, $(10-2x)(9-2x)+(9-2x)(7-2x)+(7-2x)(10-2x)=131$

বা, $90-38x+4x^2+63-32x+4x^2+70-34x+4x^2-131=0$

বা, $12x^2-104x+92=0$

বা, $3x^2-26x+23=0$

বা, $3x^2-3x-23x+23=0$

বা, $3x(x-1)-23(x-1)=0$

বা, $(x-1)(3x-23)=0$

বা, $x-1=0$ অথবা $3x-23=0$

বা, $x=1$ অথবা, $x=\dfrac{23}{3}=7\cdot67$ (প্রায়)

বাক্সটির পুরুত্ব তার বাইরের তিনটি পরিমাপের কোনোটির চেয়েই বড় হতে পারে না।

$\therefore\ x=1$

নির্ণেয় বাক্সের পুরুত্ব 1 সে.মি.।

উদাহরণ ৫। কোনো ঘনকের পৃষ্ঠতলের কর্ণের দৈর্ঘ্য $8\sqrt{2}$ সে.মি. হলে এর কর্ণের দৈর্ঘ্য ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ঘনকের ধার a

$\therefore$ ঘনকটির পৃষ্ঠতলের কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{2}a$

কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{3}a$

এবং আয়তন = a^3

প্রশ্নানুসারে, $\sqrt{2}a=8\sqrt{2}\quad\therefore\ a=8$

$\therefore$ ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{3}\times 8$ সে.মি. = $13\cdot856$ সে.মি. (প্রায়)

এবং আয়তন = 8^3 ঘন সে.মি. = 512 ঘন সে.মি.।

নির্ণেয় কর্ণের দৈর্ঘ্য $13\cdot856$ সে.মি. (প্রায়) এবং আয়তন 512 ঘন সে.মি.।

উদাহরণ ৬। কোনো আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 12 সে.মি. এবং প্রস্থ 5 সে.মি.। একে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 12 সে.মি. এবং প্রস্থ 5 সে.মি.। একে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে একটি সমবৃত্তভূমিক বেলন আকৃতির ঘনবস্তু উৎপন্ন হবে, যার উচ্চতা $h = 12$ সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ $r = 5$ সে.মি.।

$\therefore$ উৎপন্ন ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(r+h)$

$= 2 \times 3\cdot1416 \times 5(5+12)$ বর্গ সে.মি.

$= 534\cdot071$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

এবং আয়তন $= \pi r^2 h$

$= 3\cdot1416 \times 5^2 \times 12$ ঘন সে.মি.

$= 942\cdot48$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $534\cdot071$ বর্গ সে.মি. (প্রায়) এবং আয়তন $942\cdot48$ ঘন সে.মি. (প্রায়)।

অনুশীলনী ১৬·৪

১। একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সে.মি., 5 সে.মি. হলে, এর পরিসীমার অর্ধেক কত সে. মি. ?

(ক) 12 (খ) 20 (গ) 24 (ঘ) 28

২। একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি. হলে, এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি. ?

(ক) $3\sqrt{3}$ (খ) $4\sqrt{3}$ (গ) $6\sqrt{3}$ (ঘ) $9\sqrt{3}$

৩। একটি ট্রাপিজিয়ামের উচ্চতা 8 সে.মি. এবং সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 9 সে.মি. ও 7 সে.মি. হলে, এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি. ?

(ক) 24 (খ) 64 (গ) 96 (ঘ) 504

৪। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

(*i*) 4 সে.মি. বর্গাকার পাথরের পরিসীমা 16 সে.মি.।

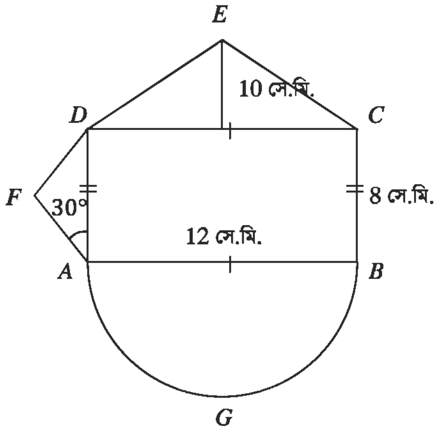
(*ii*) 3 সে.মি. ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পাতের ক্ষেত্রফল 3π বর্গ সে.মি.।

(*iii*) 5 সে.মি. উচ্চতা এবং 2 সে.মি. ব্যাসার্ধের বেলন আকৃতির বস্তুর আয়তন 20π ঘন সে.মি.।

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) *i* ও *ii* (খ) *i* ও *iii* (গ) *ii* ও *iii* (ঘ) *i*, *ii* ও *iii*

চিত্রের তথ্য অনুসারে নিচের (৫—৭)) প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :



৫। *ABCD* আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য কত সে. মি. ?

(ক) 13 (খ) 14 (গ) 14·4 (প্রায়) (ঘ) 15

৬। *ADF* ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে. মি. ?

(ক) 16 (খ) 32 (গ) 64 (ঘ) 128

৭। *AGB* অর্ধবৃত্তের পরিধি কত সে. মি. ?

(ক) 18 (খ) 18·85 (প্রায়) (গ) 37·7 (প্রায়) (ঘ) 96

৮। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 16 মিটার, 12 মিটার ও 4·5 মিটার। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল, কর্ণের দৈর্ঘ্য ও আয়তন নির্ণয় কর।

৯। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 21:16:12 এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 87 সে.মি. হলে, ঘনবস্তুটির তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১০। একটি আয়তাকার ঘনবস্তু 48 বর্গমিটার ভূমির উপর দণ্ডায়মান। এর উচ্চতা 3 মিটার এবং কর্ণ 13 মিটার। আয়তকরার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

১১। একটি আয়তাকার কাঠের বাক্সের বাইরের মাপ যথাক্রমে 8 সে.মি., 6 সে.মি., ও 4 সে.মি.। এর ভিতরের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 88 বর্গ সে.মি.। বাক্সটির কাঠের পুরুত্ব নির্ণয় কর।

১২। একটি দেওয়ালের দৈর্ঘ্য 25 মিটার, উচ্চতা 6 মিটার এবং পুরুত্ব 30 সে.মি.। একটি ইটের দৈর্ঘ্য 10 সে.মি., প্রস্থ 5 সে.মি. এবং উচ্চতা 3 সে.মি.। দেওয়ালটি ইট দিয়ে তৈরি করতে প্রয়োজনীয় ইটের সংখ্যা নির্ণয় কর।

১৩। একটি ঘনক আকৃতিবস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 2400 বর্গ সে.মি. হলে, এর কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১৪। 12 সে.মি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি বেলনের ভূমির ব্যাসার্ধ 5 সে.মি.। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

১৫। একটি বেলনের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 100 বর্গ সে.মি. এবং আয়তন 150 ঘন সে.মি.। বেলনের উচ্চতা এবং ভূমির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

১৬। একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 4400 বর্গ সে.মি.। এর উচ্চতা 30 সে.মি. হলে, সমগ্রতল নির্ণয় কর।

১৭। একটি লোহার পাইপের ভিতরের ও বাইরের ব্যাস যথাক্রমে 12 সে.মি. ও 14 সে.মি. এবং পাইপের উচ্চতা 5 মিটার। 1 ঘন সে.মি. লোহার ওজন $7 \cdot 2$ গ্রাম হলে, পাইপের লোহার ওজন নির্ণয় কর।

১৮। একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 12 মিটার এবং প্রস্থ 5 মিটার। আয়তাকার ক্ষেত্রটিকে পরিবেষ্টিত করে একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্র আছে যেখানে আয়তাকার ক্ষেত্র দ্বারা অনাধিকৃত অংশে ঘাস লাগানো হলো।

(ক) উপরের তথ্যের ভিত্তিতে সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ চিত্র আঁক।

(খ) বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির ব্যাস নির্ণয় কর।

(গ) প্রতি বর্গমিটার ঘাস লাগাতে 50 টাকা খরচ হলে, মোট খরচ নির্ণয় কর।

১৯। ΔABC ও ΔBCD একই ভূমি BC এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখা যুগল BC ও AD এর মধ্যে অবস্থিত।

ক. উপরের বর্ণনা অনুসারে চিত্রটি আঁক।

খ. প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র ABC = Δ ক্ষেত্র BCD.

গ. Δ ক্ষেত্রে ABC এর সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক আঁক যার একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)।

২০। একটি সামান্তরিক ক্ষেত্র ABCD এবং একটি আয়তক্ষেত্র BCEF উভয়ের ভূমি BC.

ক. একই উচ্চতা বিবেচনা করে সামান্তরিকক্ষেত্র ও আয়তক্ষেত্রটির চিত্র আঁক।

খ. দেখাও যে, ABCD ক্ষেত্রটির পরিসীমা BCEF ক্ষেত্রটির পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

গ. আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 5:3 এবং ক্ষেত্রটির পরিসীমা 48 মিটার হলে, সামান্তরিক ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সপ্তদশ অধ্যায়

পরিসংখ্যান (Statistics)

বিজ্ঞান ও প্রযুক্তির উন্নয়নের অগ্রযাত্রায় তথ্য ও উপাত্তের অবদানের ফলে পৃথিবী পরিণত হয়েছে বিশ্বগ্রামে। তথ্য ও উপাত্তের দ্রুত সঞ্চালন ও বিস্তারের জন্য সম্ভব হয়েছে বিশ্বায়নের। তাই উন্নয়নের ধারা অব্যাহত রাখা ও বিশ্বায়নে অংশগ্রহণ অবদান রাখতে হলে তথ্য ও উপাত্ত সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান অর্জন এ স্তরের শিক্ষার্থীদের জন্য অপরিহার্য। প্রাসঙ্গিকভাবে শিক্ষার্থীর জ্ঞান অর্জনের চাহিদা মেটানোর লক্ষে ষষ্ঠ শ্রেণি থেকে তথ্য ও উপাত্তের আলোচনা করা হয়েছে এবং ধাপে ধাপে শ্রেণিভিত্তিক বিষয়বস্তুর বিন্যাস করা হয়েছে। এরই ধারাবাহিকতায় এ শ্রেণিতে শিক্ষার্থীরা ক্রমযোজিত গণসংখ্যা, গণসংখ্যা বহুভুজ, অজিভ রেখা, কেন্দ্রিয় প্রবণতা পরিমাপে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড়, মধ্যক ও প্রচুরক ইত্যাদি সম্বন্ধে জানবে ও শিখবে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- ক্রমযোজিত গণসংখ্যা, গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখার সাহায্যে উপাত্ত ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কেন্দ্রিয় প্রবণতার পরিমাপ পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কেন্দ্রিয় প্রবণতা পরিমাপে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতির প্রয়োজনীয়তা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সংক্ষিপ্ত পদ্ধতির সাহায্যে গড়, মধ্যক ও প্রচুরক নির্ণয় করতে পারবে।
- গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা লেখচিত্রের ব্যাখ্যা করতে পারবে।

উপাত্তের উপস্থাপন : আমরা জানি, গুণবাচক নয় এমন সংখ্যাসূচক তথ্যাবলি পরিসংখ্যানের উপাত্ত। অনুসন্ধানাধীন উপাত্ত পরিসংখ্যানের কাঁচামাল। এগুলো অবিন্যস্তভাবে থাকে এবং অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে সরাসরি প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় না। প্রয়োজন হয় উপাত্তগুলো বিন্যস্ত ও সারণিভুক্ত করা। আর উপাত্তসমূহের সারণিভুক্ত করা হলো উপাত্তের উপস্থাপন। আগের শ্রেণিতে আমরা উপাত্তসমূহ কীভাবে সারণিভুক্ত করে বিন্যস্ত করতে হয় তা শিখেছি। আমরা জানি, কোনো উপাত্ত সারণিভুক্ত করতে হলে প্রথমে তার পরিসর নির্ধারণ করতে হয়। এরপর শ্রেণি ব্যবধান ও শ্রেণি সংখ্যা নির্ধারণ করে ট্যালি চিহ্ন ব্যবহার করে গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি তৈরি করা হয়। এখানে বুঝার সুবিধার্থে নিচের উদাহরণের মাধ্যমে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করার পদ্ধতি পুনরালোচনা করা হলো।

উদাহরণ ১। কোন এক শীত মৌসুমে শ্রীমঙ্গালের জানুয়ারি মাসের ৩১ দিনের সর্বনিম্ন তাপমাত্রা (সেলসিয়াস) নিচে দেওয়া হলো। সর্বনিম্ন তাপমাত্রার (সেলসিয়াস) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর।

১৪°, ১৪°, ১৪°, ১৩°, ১২°, ১৩°, ১০°, ১০°, ১১°, ১২°, ১১°, ১০°, ৯°, ৮°, ৯°,

১১°, ১০°, ১০°, ৮°, ৯°, ৭°, ৬°, ৬°, ৬°, ৬°, ৭°, ৮°, ৯°, ৯°, ৮°, ৭°।

সমাধান : এখানে তাপমাত্রা নির্দেশক উপাত্তের সবচেয়ে ছোট সংখ্যা ৬ এবং বড় সংখ্যা ১৪।

সুতরাং উপাত্তের পরিসর = (১৪ – ৬) + ১ = ৯।

এখন শ্রেণি ব্যবধান যদি ৩ নেওয়া হয় তবে শ্রেণি সংখ্যা হবে $\frac{৯}{৩}$ বা ৩।

শ্রেণি ব্যবধান ৩ নিয়ে তিন শ্রেণিতে উপাত্তসমূহ বিন্যাস করলে গণসংখ্যা (ঘটন সংখ্যাও বলা হয়) নিবেশন সারণি হবে নিম্নরূপ :

তাপমাত্রা (সেলসিয়াস)	ট্যালি চিহ্ন	গণসংখ্যা বা ঘটন সংখ্যা
৬° – ৮°	~~IIII~~ ~~IIII~~ I	১১
৯° – ১১°	~~IIII~~ ~~IIII~~ III	১৩
১২° – ১৪°	~~IIII~~ II	৭
		মোট ৩১।

কাজ : তোমাদের শ্রেণিতে অধ্যয়নরত সকল শিক্ষার্থীর দুইটি দল গঠন কর। দলের সদস্যদের ওজনের (কেজিতে) গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি তৈরি কর।

ক্রমযোজিত গণসংখ্যা (*Cumulative Frequency*) :

উদাহরণ ১ এর শ্রেণি ব্যবধান ৩ ধরে শ্রেণিসংখ্যা নির্ধারণ করে গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি তৈরি করা হয়েছে। উলেখিত উপাত্তের শ্রেণি সংখ্যা ৩। প্রথম শ্রেণির সীমা হলো ৬° – ৮°। এই শ্রেণির নিম্নসীমা ৬° এবং উচ্চসীমা ৮° সে.। এই শ্রেণির গণসংখ্যা ১১।

দ্বিতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা ১৩। এখন প্রথম শ্রেণির গণসংখ্যা ১১ এর সাথে দ্বিতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা ১৩ যোগ করে পাই ২৪। এই ২৪ হবে দ্বিতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা। আর প্রথম শ্রেণি দিয়ে শুরু হওয়ায় এই শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা হবে ১১। আবার দ্বিতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা ২৪ এর সাথে তৃতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা যোগ করলে ২৪ + ৭ = ৩১, যা তৃতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা। এইভাবে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করা হয়। উপরের আলোচনার প্রেক্ষিতে উদাহরণ ১ এর তাপমাত্রার ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি নিম্নরূপ :

তাপমাত্রা (সেলসিয়াসে)	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
৬° – ৮°	১১	১১
৯° – ১১°	১৩	(১১ + ১৩) = ২৪
১২° – ১৪°	৭	(২৪ + ৭) = ৩১

উদাহরণ ২। নিচে ৪০ জন শিক্ষার্থীর বার্ষিক পরীক্ষায় ইংরেজিতে প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হলো (পূর্ণ নম্বর ১০০)। প্রাপ্ত নম্বরের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর।

৭০, ৪০, ৩৫, ৬০, ৫৫, ৫৮, ৪৫, ৬০, ৬৫, ৮০, ৭০, ৪৬, ৫০, ৬০, ৬৫, ৭০, ৫৮, ৬০, ৪৮, ৭০, ৩৬, ৮৫, ৬০, ৫০, ৪৬, ৬৫, ৫৫, ৬১, ৭২, ৮৫, ৯০, ৬৮, ৬৫, ৫০, ৪০, ৫৬, ৬০, ৬৫, ৪৬, ৭৬।

সমাধান : উপাত্তের পরিধি = (সর্বোচ্চ মান – সর্বনিম্নমান) + ১

= (৯০ – ৩৫) + ১

= ৫৫ + ১

= ৫৬

শ্রেণি ব্যবধান যদি ৫ ধরা হয়, তবে শ্রেণি সংখ্যা = $\frac{৫৬}{৫}$

= ১১·২ বা ১২

সুতরাং শ্রেণি ব্যবধান ৫ ধরে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি হবে নিম্নরূপ :

প্রাপ্ত নম্বর	টালি চিহ্ন	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	প্রাপ্ত নম্বর	টালি চিহ্ন	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
৩৫ – ৩৯	||	২	২	৭০ – ৭৪	||||	৪	৪ + ৩১ = ৩৫
৪০ – ৪৪	||	২	২ + ২ = ৪	৭৫ – ৭৯	|	১	১ + ৩৫ = ৩৬
৪৫ – ৪৯	𝍸	৫	৫ + ৪ = ৯	৮০ – ৮৪	|	১	১ + ৩৬ = ৩৭
৫০ – ৫৪	|||	৩	৩ + ৯ = ১২	৮৫ – ৮৯	||	২	২ + ৩৭ + ৩৯
৫৫ – ৫৯	𝍸	৫	৫ + ১২ = ১৭	৯০ – ৯৪	|	১	১ + ৩৯ = ৪০
৬০ – ৬৪	𝍸|||	৮	৮ + ১৭ = ২৫	৯৫ – ৯৯		০	০ + ৪০ = ৪০
৬৫ – ৬৯	𝍸|	৬	৬ + ২৫ = ৩১				

চলক : আমরা জানি সংখ্যাসূচক তথ্যসমূহ পরিসংখ্যানের উপাত্ত। উপাত্তে ব্যবহৃত সংখ্যাসমূহ হলো চলক। যেমন, উদাহরণ ১ এ তাপমাত্রা নির্দেশক সংখ্যাগুলো চলক। তদনুরূপ উদাহরণ ২ এ প্রাপ্ত নম্বরগুলো ব্যবহৃত উপাত্তের চলক।

বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন চলক : পরিসংখ্যানে ব্যবহৃত চলক দুই প্রকারের হয়। যেমন বিচ্ছিন্ন চলক ও অবিচ্ছিন্ন চলক। যে চলকের মান শুধুমাত্র পূর্ণসংখ্যা হয় তা বিচ্ছিন্ন চলক, যেমন উদাহরণ ২ এ ব্যবহৃত প্রাপ্ত নম্বর। তদনুরূপ জনসংখ্যা নির্দেশক উপাত্তে পূর্ণসংখ্যা ব্যবহৃত হয়। তাই জনসংখ্যামূলক উপাত্তের চলক হচ্ছে বিচ্ছিন্ন চলক। আর যেসকল চলকের মান যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে, সে সকল চলক অবিচ্ছিন্ন চলক। যেমন উদাহরণ ১–এ ব্যবহৃত তাপমাত্রা নির্দেশক উপাত্তে যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। এ ছাড়া বয়স, উচ্চতা, ওজন ইত্যাদি সংশিষ্ট উপাত্তে যেকোনো বাস্তব সংখ্যা ব্যবহার করা যায়। তাই এগুলোর জন্য ব্যবহৃত চলক হচ্ছে অবিচ্ছিন্ন চলক। অবিচ্ছিন্ন চলকের

দুইটি মানের মধ্যবর্তী যেকোনো সংখ্যাও ঐ চলকের মান হতে পারে। অনেক সময় শ্রেণি ব্যবধান অবিচ্ছিন্ন করার প্রয়োজন হয়। শ্রেণি ব্যবধান অবিচ্ছিন্ন করার জন্য কোনো শ্রেণির উচ্চসীমা এবং পরবর্তী শ্রেণির নিম্নসীমার মধ্যবিন্দু নিয়ে সেই শ্রেণির প্রকৃত উচ্চসীমা এবং পরবর্তী শ্রেণির প্রকৃত নিম্নসীমা নির্ধারণ করা হয়। যেমন, উদাহরণ ১ এ প্রথম শ্রেণির প্রকৃত উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা যথাক্রমে ৮·৫° ও ৫·৫° এবং দ্বিতীয় শ্রেণির উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা যথাক্রমে ১১·৫° ও ৮·৫° ইত্যাদি।

কাজ : তোমাদের শ্রেণির শিক্ষার্থীদের নিয়ে অনূর্ধ্ব ৪০ জনের দল গঠন কর। দলের সদস্যদের ওজন/উচ্চতা নিয়ে দলে গণসংখ্যা নিবেশণ ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর।

উপাত্তের লেখচিত্র : আমরা দেখেছি যে, অনুসন্ধানাধীন সংগৃহীত উপাত্ত পরিসংখ্যানের কাঁচামাল। এগুলো গণসংখ্যা নিবেশণ সারণিভুক্ত বা ক্রমযোজিত সারণিভুক্ত করা হলে এদের সম্বন্ধে সম্যক ধারণা করা ও সিদ্ধান্ত নেওয়া সহজ হয়। এই সারণিভুক্ত উপাত্তসমূহ যদি লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়, তবে তা বুঝার জন্য যেমন আরও সহজ হয় তেমনি চিত্তাকর্ষক হয়। এ জন্য পরিসংখ্যানের উপাত্তসমূহ সারণিভুক্ত করা ও লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন বহুল প্রচলিত এবং ব্যাপক ব্যবহৃত পদ্ধতি। ৮ম শ্রেণি পর্যন্ত বিভিন্ন প্রকার লেখচিত্রের মধ্যে রেখাচিত্র ও আয়তলেখ সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে এবং এগুলো কিভাবে আঁকতে হয় তা দেখানো হয়েছে। এখানে কীভাবে গণসংখ্যা নিবেশণ ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ, পাইচিত্র ও অজিভ রেখা আঁকা হয় তা নিয়ে আলোচনা করা হবে।

গণসংখ্যা বহুভুজ (*Frequency Polygon*) **:** ৮ম শ্রেণিতে আমরা বিচ্ছিন্ন উপাত্তের আয়তলেখ আঁকা শিখেছি। এখানে কীভাবে প্রথমে অবিচ্ছিন্ন উপাত্তের আয়তলেখ এঁকে তার গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হয়, তা উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হলো।

উদাহরণ ৩। কোনো স্কুলের ১০ম শ্রেণির ৬০ জন শিক্ষার্থীর ওজনের (কিলোগ্রাম) গণসংখ্যা নিবেশণ হলো নিম্নরূপ:

ওজন (কেজি)	৪৬ – ৫০	৫১ – ৫৫	৫৬ – ৬০	৬১ – ৬৫	৬৬ – ৭০
গণসংখ্যা (শিক্ষার্থীর সংখ্যা)	৫	১০	২০	১৫	১০

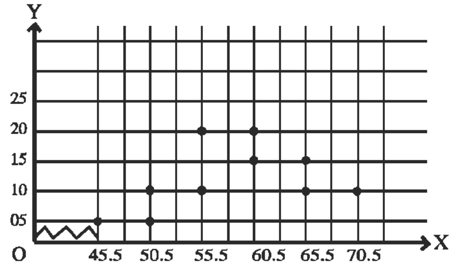
(ক) গণসংখ্যা নিবেশণের আয়তলেখ আঁক।

(খ) আয়তলেখের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

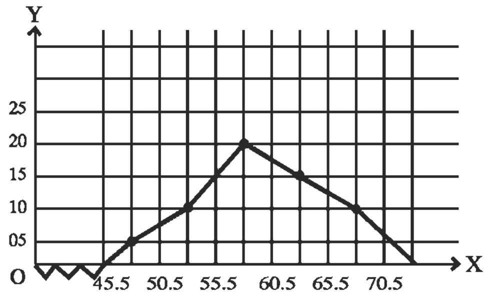
সমাধান : প্রদত্ত সারণিতে উপাত্তের শ্রেণি ব্যবধান বিচ্ছিন্ন। শ্রেণি ব্যবধান অবিচ্ছিন্ন করা হলে প্রদত্ত সারণি হবে :

শ্রেণি ব্যবধান : ওজন (কেজি)	অবিচ্ছিন্ন শ্রেণিসীমা	শ্রেণি মধ্যবিন্দু	গণসংখ্যা
৪৬ – ৫০	৪৫·৫ – ৫০·৫	৪৮	৫
৫১ – ৫৫	৫০·৫ – ৫৫·৫	৫৩	১০
৫৬ – ৬০	৫৫·৫ – ৬০·৫	৫৮	২০
৬১ – ৬৫	৬০·৫ – ৬৫·৫	৬৩	১৫
৬৬ – ৭০	৬৫·৫ – ৭০·৫	৬৮	১০

(ক) ছক কাগজের প্রতি ঘরকে এক একক ধরে x-অক্ষ বরাবর শ্রেণিসীমা এবং y-অক্ষ বরাবর গণসংখ্যা নিয়ে আঁয়তলেখ আঁকা হয়েছে। x–অক্ষ বরাবর শ্রেণিসীমা ৪৫·৫ থেকে আরম্ভ হয়েছে। মূলবিন্দু থেকে ৪৫·৫ পর্যন্ত পূর্ববর্তী ঘরগুলো আছে বোঝাতে ভাঙা চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।



(খ) আয়তলেখ হতে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকার জন্য প্রাপ্ত আয়তলেখের আয়তসমূহের ভূমির সমান্তরাল বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুসমূহ নির্ধারণ করা হয়েছে। চিহ্নিত মধ্যবিন্দুসমূহ রেখাংশ দ্বারা সংযুক্ত করে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হয়েছে (পাশের চিত্রে দেখানো হলো)। গণসংখ্যা বহুভুজ সুন্দর দেখানোর জন্য প্রথম ও শেষ আয়তের মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় শ্রেণি ব্যবধান নির্দেশক x-অক্ষের সাথে সংযুক্ত করা হয়েছে।

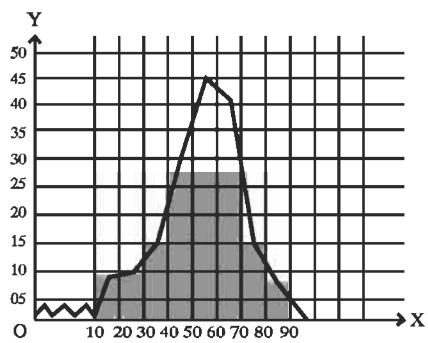


> **গণসংখ্যা বহুভুজ :** অবিছিন্ন উপাত্তের শ্রেণি ব্যবধানের বিপরীতে গণসংখ্যা নির্দেশক বিন্দুসমূহকে পর্যায়ক্রমে রেখাংশ দ্বারা যুক্ত করে যে লেখচিত্র পাওয়া যায়, তাই হলো গণসংখ্যা বহুভুজ।

উদাহরণ ৪। নিচের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণির বহুভুজ অঙ্কন কর।

শ্রেণি ব্যবধান	১০–২০	২০–৩০	৩০–৪০	৪০–৫০	৫০–৬০	৬০–৭০	৭০–৮০	৮০–৯০
মধ্যবিন্দু	১৫	২৫	৩৫	৪৫	৫৫	৬৫	৭৫	৮৫
গণসংখ্যা	৮	১০	১৫	৩০	৪৫	৪১	১৫	৭

সমাধান : x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি দুই ঘরকে শ্রেণি ব্যবধানের ৫ একক ধরে এবং y-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি দুই ঘরকে গণসংখ্যার ৫ একক ধরে প্রদত্ত গণসংখ্যা নিবেশণের আয়তলেখ আঁকা হলো। আয়তলেখের আয়তসমূহের ভূমির বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু যা শ্রেণির মধ্যবিন্দু চিহ্নিত করি। এখন চিহ্নিত মধ্যবিন্দুসমূহ রেখাংশ দ্বারা সংযুক্ত করি। প্রথম শ্রেণির প্রান্তবিন্দু ও শেষ শ্রেণির প্রান্তবিন্দুদ্বয়কে শ্রেণি ব্যবধান নির্দেশক x-অক্ষের সাথে সংযুক্ত করে গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করা হলো।



> **কাজ :** তোমাদের শ্রেণিতে অধ্যয়নরত শিক্ষার্থীদের প্রথম সাময়িক পরীক্ষায় বাংলায় প্রাপ্ত নম্বর নিয়ে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

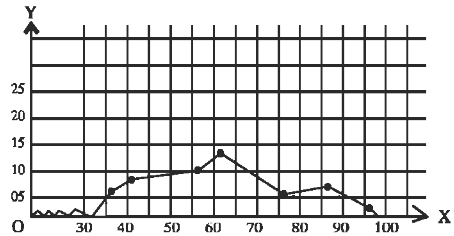
উদাহরণ ৫। ১০ম শ্রেণির ৫০ জন শিক্ষার্থীর বিজ্ঞান বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি দেওয়া হলো। প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক (আয়তলেখ ব্যবহার না করে)।

প্রাপ্ত নম্বরের শ্রেণি ব্যবধান	৩১–৪০	৪১–৫০	৫১–৬০	৬১–৭০	৭১–৮০	৮১–৯০	৯১–১০০
গণসংখ্যা	৬	৮	১০	১২	৫	৭	২

সমাধান : এখানে প্রদত্ত উপাত্ত বিচ্ছিন্ন। এক্ষেত্রে শ্রেণি ব্যবধানের মধ্যবিন্দু বের করে সরাসরি গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা সুবিধাজনক।

শ্রেণি ব্যবধান	৩১–৪০	৪১–৫০	৫১–৬০	৬১–৭০	৭১–৮০	৮১–৯০	৯১–১০০
মধ্যবিন্দু	$\frac{৪০+৩১}{২}$ $=৩৫\cdot৫$	৪৫·৫	৫৫·৫	৬৫·৫	৭৫·৫	৮৫·৫	৯৫·৫
গণসংখ্যা	৬	৮	১০	১২	৫	৭	২

x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি ২ ঘরকে শ্রেণি ব্যবধানের মধ্যবিন্দুর ১০ একক ধরে এবং y-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ১ ঘরকে গণসংখ্যার ১ একক ধরে প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হলো।



কাজ : ১০০ জন কলেজ ছাত্রের উচ্চতার গণসংখ্যা নিবেশণ থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

উচ্চতা (সে.মি.)	১৪১–১৫০	১৫১–১৬০	১৬১–১৭০	১৭১–১৮০	১৮১–১৯০

ক্রমযোজিত গণসংখ্যা লেখচিত্র বা অজিভ রেখা : কোনো উপাত্তের শ্রেণি বিন্যাসের পর শ্রেণি ব্যবধানের উচ্চসীমা x-অক্ষ বরাবর এবং শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা y-অক্ষ বরাবর স্থাপন করে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার লেখচিত্র বা অজিভ রেখা পাওয়া যায়।

উদাহরণ ৬। কোনো শ্রেণির ৬০ জন শিক্ষার্থীর ৫০ নম্বরের সাময়িকী পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি হলো :

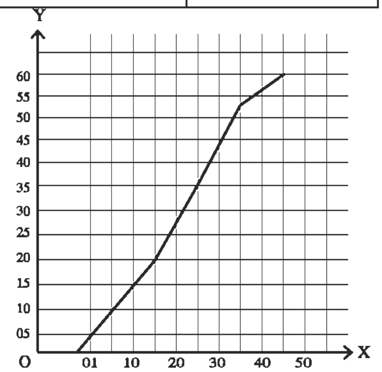
প্রাপ্ত নম্বরের শ্রেণি ব্যবধান	১ – ১০	১১ – ২০	২১ – ৩০	৩১ – ৪০	৪১ – ৫০
গণসংখ্যা	৮	১২	১৫	১৮	৭

এই গণসংখ্যা নিবেশণের অজিভ রেখা আঁক।

সমাধান : প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা নিবেশণের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি হলো :

প্রাপ্ত নম্বরের শ্রেণি ব্যবধান	১ – ১০	১১ – ২০	২১ – ৩০	৩১ – ৪০	৪১ – ৫০
গণসংখ্যা	৮	১২	১৫	১৮	৭
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	৮	৮ + ১২ = ২০	১৫ + ২০ = ৩৫	১৮ + ৩৫ = ৫৩	৭ + ৫৩ = ৬০

x–অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি দুই ঘরকে শ্রেণি ব্যবধানের উচ্চসীমার একক এবং y–অক্ষ বরাবর ছক কাগজের এক ঘরকে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার ৫ একক ধরে প্রদত্ত উপাত্তের ক্রমযোজিত গণসংখ্যার অজিভ রেখা আঁকা হলো



কাজ : কোনো এক পরীক্ষায় গণিতে তোমাদের শ্রেণির ৫০ ও তার চেয়ে বেশি নম্বরপ্রাপ্ত শিক্ষার্থীদের নম্বরের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর এবং অজিভ রেখা আঁক।

কেন্দ্রীয় প্রবণতা : সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণিতে কেন্দ্রীয় প্রবণতা ও এর পরিমাপ সমন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। আমরা দেখেছি যে, অনুসন্ধানাধীন অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে, উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জিভূত হয়। আবার অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ গণসংখ্যা নিবেশণ সারণিতে উপস্থাপন করা হলে মাঝামাঝি একটি শ্রেণিতে গণসংখ্যার প্রাচুর্য দেখা যায়। অর্থাৎ, মাঝামাঝি একটি শ্রেণিতে গণসংখ্যা খুব বেশি হয়। বস্তুত উপাত্তসমূহের কেন্দ্রিয় মানের দিকে পুঞ্জিভূত হওয়ার এই প্রবণতাই হলো কেন্দ্রীয় প্রবণতা। কেন্দ্রীয় মান একটি সংখ্যা এবং এই সংখ্যা উপাত্তসমূহের প্রতিনিধিত্ব করে। এই সংখ্যা দ্বারা কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করা হয়। সাধারণত কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ হলো : (১) গাণিতিক গড় (২) মধ্যক (৩) প্রচুরক।

গাণিতিক গড় : আমরা জানি, উপাত্তসমূহের মানের সমষ্টিকে যদি তার সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা হয়, তবে উপাত্তসমূহের গড় মান পাওয়া যায়। তবে উপাত্তসমূহের সংখ্যা যদি খুব বেশি হয় তাহলে এ পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা সময়সাপেক্ষ, বেশ কঠিন ও ভুল হওয়ার সম্ভাবনা থাকে। এ সকল ক্ষেত্রে উপাত্তসমূহ শ্রেণি বিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ করে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ ৭। নিচে কোনো একটি শ্রেণির শিক্ষার্থীদের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। প্রাপ্ত নম্বরের গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	২৫–৩৪	৩৫–৪৪	৪৫–৫৪	৫৫–৬৪	৬৫–৭৪	৭৫–৮৪	৮৫–৯৪
গণসংখ্যা	৫	১০	১৫	২০	৩০	১৬	৪

সমাধান : এখানে শ্রেণি ব্যাপ্তি দেওয়া আছে বিধায় শিক্ষার্থীদের ব্যক্তিগত নম্বর কত তা জানা যায় না। এ ক্ষেত্রে প্রত্যেক শ্রেণির শ্রেণি মধ্যমান নির্ণয় করার প্রয়োজন হয়।

$$\text{শ্রেণি মধ্যমান} = \frac{\text{শ্রেণির উর্ধ্বমান+শ্রেণির নিম্নমান}}{২}$$

যদি শ্রেণি মধ্যমান $x_i(i=1.....,k)$ হয় তবে মধ্যমান সংবলিত সারণি হবে নিম্নরূপ :

শ্রেণি ব্যাপ্তি	শ্রেণি মধ্যমান (x_i)	গণসংখ্যা (f_i)	$(f_i x_i)$
২৫ – ৩৪	২৯·৫	৫	১৪৭·৫
৩৫ – ৪৪	৩৯·৫	১০	৩৯৫·০
৪৫ – ৫৪	৪৯·৫	১৫	৭৪২·৫
৫৫ – ৬৪	৫৯·৫	২০	১১৯০·০
৬৫ – ৭৪	৬৯·৫	৩০	২০৮৫·০
৭৫ – ৮৪	৭৯·৫	১৬	১২৭২·০
৮৫ – ৯৪	৮৯·৫	৪	৩৫৮·০
	মোট	$n=$ ১০০	৬১৯০·০০

নির্ণেয় গাণিতিক গড় = $\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{k} f_i x_i \quad = \frac{১}{১০০}\times$ ৬১৯০

= ৬১·৯

শ্রেণিবিন্যাসকৃত উপাত্তের গাণিতিক গড় (সহজ পদ্ধতি)

শ্রেণিবিন্যাসকৃত উপাত্তের গাণিতিক গড় নির্ণয়ের জন্য সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি হলো সহজ।

সহজ পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়ের ধাপসমূহ –

১। শ্রেণিসমূহের মধ্যমান নির্ণয় করা

২। মধ্যমানসমূহ থেকে সুবিধাজনক কোনো মানকে আনুমানিক গড় (a) ধরা

৩। প্রত্যেক শ্রেণির মধ্যমান থেকে আনুমানিক গড় বিয়োগ করে তাকে শ্রেণি ব্যাপ্তি দ্বারা ভাগ করে ধাপ বিচ্যুতি

$$u = \frac{\text{মধ্যমান – আনুমানিক গড়}}{\text{ব্যাপ্তি}}$$ নির্ণয় করা

৪। ধাপ বিচ্যুতিকে সংশ্লিষ্ট শ্রেণির গণসংখ্যা দ্বারা গুণ করা

৫। বিচ্যুতির গড় নির্ণয় করা এবং এর সাথে আনুমানিক গড় যোগ করে কাঙ্ক্ষিত গড় নির্ণয় করা।

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি : এ পদ্ধতিতে উপাত্তসমূহের গাণিতিক গড় নির্ণয়ে ব্যবহৃত সূত্র হলো :

$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{n} \times h$ যেখানে, $\bar{x}$ = নির্ণেয় গড়, a = আনুমানিক গড়, f_i = i-তম শ্রেণির গণসংখ্যা, $u_i f_i$ = i তম শ্রেণির গণসংখ্যা ধাপ বিচ্যুতি h = শ্রেণি ব্যাপ্তি

উদাহরণ ৮। কোন দ্রব্যের উৎপাদনে বিভিন্ন পর্যায়ে যে খরচসমূহ (শত টাকায়) হয় তা নিচের সারণিতে দেখানো হয়েছে। সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় খরচ নির্ণয় কর।

উৎপাদন খরচ (শত টাকায়)	২–৬	৬–১০	১০–১৪	১৪–১৮	১৮–২২	২২–২৬	২৬–৩০	৩০–৩৪
গণসংখ্যা	১	৯	২১	৪৭	৫২	৩৬	১৯	৩

সমাধান : সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে অনুসৃত ধাপের আলোকে গড় নির্ণয়ের সারণি হবে নিম্নরূপ :

শ্রেণি ব্যাপ্তি	মধ্যমান x_i	গণসংখ্যা f_i	ধাপ বিচ্যুতি $u_i = \frac{x_i - a}{h}$	গণসংখ্যা ধাপ বিচ্যুতি $f_i u_i$
২ – ৬	৪	১	– ৪	– ৪
৬ – ১০	৮	৯	– ৩	– ২৭
১০ – ১৪	১২	২১	– ২	– ৪২
১৪ – ১৮	১৬	৪৭	– ১	– ৪৭
১৮ – ২২	২০ ← a	৫২	০	০
২২ – ২৬	২৪	৩৬	১	৩৬
২৬ – ৩০	২৮	১৯	২	৩৮
৩০ – ৩৪	৩২	৩	৩	৯
মোট		১৮৮		– ৩৭

গড় $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{n} \times h$

$= ২০ + \frac{-৩৭}{১৮৮} \times ৪$

$= ২০ - ·৭৯$

$= ১৯·২১$

$\therefore$ উৎপাদনে আনুমানিক গড় খরচ ১৯ শত টাকা।

গুরুত্ব যুক্ত উপাত্তের গড় নির্ণয়

অনেক ক্ষেত্রে অনুসন্ধানাধীন পরিসংখ্যানের চলকের সাংখ্যিক মান $x_1,\ x_2, \ldots\ldots, x_n$ বিভিন্ন কারণ/গুরুত্ব/ভার দ্বারা প্রভাবিত হতে পারে। এ সকল ক্ষেত্রে উপাত্তের মান $x_1,\ x_2, \ldots\ldots, x_n$ এর সাথে এদের কারণ/গুরুত্ব/ভার $w_1,\ w_2, \ldots\ldots, w_n$ বিবেচনা করে গাণিতিক গড় নির্ণয় করতে হয়।

যদি n সংখ্যক উপাত্তের মান $x_1,\ x_2, \ldots\ldots, x_n$ হয় এবং এদের গুরুত্ব যদি $w_1,\ w_2, \ldots\ldots, w_n$ হয়, তবে এদের গুরুত্ব প্রদত্ত গাণিতিক গড় হবে

$$\overline{x_w} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

উদাহরণ ৯। কোনো বিশ্ববিদ্যালয়ের কয়েকটি বিভাগের স্নাতক সম্মান শ্রেণিতে পাশের হার ও শিক্ষার্থীর সংখ্যা নিচের সারণিতে উপস্থাপন করা হলো। উক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের ঐ কয়টি বিভাগের স্নাতক সম্মান শ্রেণিতে পাশের গড় হার নির্ণয় কর।

বিভাগের নাম	গণিত	পরিসংখ্যান	ইংরেজি	বাংলা	প্রাণিবিদ্যা	রাষ্ট্রবিজ্ঞান
পাশের হার (শতকরায়)	৭০	৮০	৫০	৯০	৬০	৮৫
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	৮০	১২০	১০০	২২৫	১৩৫	৩০০

সমাধান : এখানে পাশের হার ও শিক্ষার্থীর সংখ্যা দেওয়া আছে। পাশের হারের তার হলো শিক্ষার্থীর সংখ্যা। যদি পাশের হারের চলক x এবং শিক্ষার্থীর সংখ্যা চলক w ধরা হয়, তবে গুরুত্ব প্রদত্ত গাণিতিক গড় নির্ণয়ের সারণি হবে নিম্নরূপ :

বিভাগের নাম	x_i	w_i	$x_i \ w_i$
গণিত	৭০	৮০	৫৬০০
পরিসংখ্যান	৮০	১২০	৯৬০০
ইংরেজি	৫০	১০০	৫০০০
বাংলা	৯০	২২৫	২০২৫০
প্রাণিবিদ্যা	৬০	১৩৫	৮১০০
রাষ্ট্রবিজ্ঞান	৮৫	৩০০	২৫৫০০
মোট		৯৬০	৭৪০৫০

$$\overline{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{6} w_i} = \frac{৭৪০৫০}{৯৬০} = ৭৭\cdot১৪$$

পাশের গড় হার ৭৭·১৪

কাজ : তোমাদের উপজেলার কয়েকটি স্কুলের এস.এস.সি. পাশের হার ও তাদের সংখ্যা সংগ্রহ কর এবং পাশের গড় হার নির্ণয় কর।

মধ্যক

৮ম শ্রেণিতে আমরা শিখেছি যে, কোন পরিসংখ্যানের উপাত্তগুলো মানের ক্রমানুসারে সাজালে যেসকল উপাত্ত সমান দুইভাগে ভাগ করে সেই মানই হবে উপাত্তগুলোর মধ্যক। আমরা আরও জেনেছি যে, যদি উপাত্তের সংখ্যা n হয় এবং n যদি বিজোড় সংখ্যা কহয় তবে মধ্যক হবে $\frac{n+1}{2}$ তম পদের মান। আর n যদি জোড় সংখ্যা হয় তবে মধ্যক হবে $\frac{n}{2}$ তম ও $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম পদ দুইটির সাংখ্যিক মানের গড়। এখানে সূত্র ব্যবহার না করে এবং ব্যবহার করে কীভাবে মধ্যক নির্ণয় করা হয় তা উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হলো।

উদাহরণ ১০। নিচের ৫১ জন শিক্ষার্থীর উচ্চতার (সে.মি.) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। মধ্যক নির্ণয় কর।

উচ্চতা (সে.মি.)	১৫০	১৫৫	১৬০	১৬৫	১৭০	১৭৫
গণসংখ্যা	৪	৬	১২	১৬	৮	৫

সমাধান : মধ্যক নির্ণয়ের গণসংখ্যা সারণি

উচ্চতা সে.মি.)	১৫০	১৫৫	১৬০	১৬৫	১৭০	১৭৫
গণসংখ্যা	৪	৬	১২	১৬	৮	৫
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	৪	১০	২২	৩৮	৪৬	৫১

এখানে n = ৫১ যা বিজোড় সংখ্যা

∴ মধ্যক = $\frac{৫১+১}{২}$ তম পদের মান

= ২৬ তম পদের মান = ১৬৫

নির্ণেয় মধ্যক ১৬৫ সে.মি.।

লক্ষ করি : ২৩ থেকে ৩৮ তম পদের মান ১৬৫।

উদাহরণ ১১ : নিচের ৬০ জন শিক্ষার্থীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। মধ্যক নির্ণয় কর :

প্রাপ্ত নম্বর	৪০	৪৫	৫০	৫৫	৬০	৭০	৮০	৮৫	৯০	৯৫	১০০
গণসংখ্যা	২	৪	৪	৩	৭	১০	১৬	৬	৪	৩	১

সমাধান : মধ্যক নির্ণয়ের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি হলো :

প্রাপ্ত নম্বর	৪০	৪৫	৫০	৫৫	৬০	৭০	৮০	৮৫	৯০	৯৫	১০০
গণসংখ্যা	২	৪	৪	৩	৭	১০	১৬	৬	৪	৩	১
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	২	৬	১০	১৩	২০	৩০	৪৬	৫২	৫৬	৫৯	৬০

এখানে, n = ৬০ যা জোড় সংখ্যা।

∴ মধ্যক = $\dfrac{\frac{৬০}{২}\text{ তম ও } \frac{৬০}{২}+১ \text{ তম পদ দুইটির মানের সমষ্টি}}{২}$

= $\dfrac{\text{৩০ তম ও ৩১ তম পদ দুইটির মানের সমষ্টি}}{২}$

= $\frac{৭০+৮০}{২}=\frac{১৫০}{২}=৭৫$

∴ নির্ণেয় মধ্যক ৭৫।

> **কাজ :** ১। তোমাদের শ্রেণির ৪৯ জন শিক্ষার্থীর উচ্চতা (সে.মি.) নিয়ে গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর এবং কোনো সূত্র ব্যবহার না করে মধ্যক নির্ণয় কর।
> ২। পূর্বের সমস্যা থেকে ৯ জনের উচ্চতা বাদ দিয়ে ৪০ জনের উচ্চতার (সে.মি.) মধ্যক নির্ণয় কর।

শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের মধ্যক নির্ণয়

যদি শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের সংখ্যা হয় n, তবে শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের $\frac{n}{২}$ তম পদের মান হচ্ছে মধ্যক। আর $\frac{n}{২}$ তম পদের মান বা মধ্যক নির্ণয়ে ব্যবহৃত সূত্র হলো মধ্যক = $L+\left(\frac{n}{2}-F_c\right)\times\frac{h}{f_m}$, যেখানে L হলো যে শ্রেণিতে মধ্যক অবস্থিত সেই শ্রেণির নিম্নসীমা, n গণসংখ্যা, F_c মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির যোজিত গণসংখ্যা, f_m মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা এবং h শ্রেণি ব্যাপ্তি।

উদাহরণ ১২। নিচের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি থেকে মধ্যক নির্ণয় কর :

সময় (সেকেন্ড)	৩০–৩৫	৩৬–৪১	৪২–৪৭	৪৮–৫৩	৫৪–৫৯	৬০–৬৫
গণসংখ্যা	৩	১০	১৮	২৫	৮	৬

সমাধান : মধ্যক নির্ণয়ের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি :

সময় (সেকেন্ডে) শ্রেণি ব্যপ্তি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
৩০ – ৩৫	৩	৩
৩৬ – ৪১	১০	১৩
৪২ – ৪৭	১৮	৩১
৪৮ – ৫৩	২৫	৫৬
৫৪ – ৫৯	৮	৬৪
৬০ – ৬৫	৬	৭০
	n = ৭০	

এখানে, $n =$ ৭০ এবং $\frac{n}{২} = \frac{৭০}{২}$ বা ৩৫ ।

অতএব, মধ্যক হলো ৩৫ তম পদের মান। ৩৫ তম পদের অবস্থান হবে (৪৮–৫৩) শ্রেণিতে। অতএব মধ্যক শ্রেণি হলো (৪৮–৫৩)।

সুতরাং, $L =$ ৪৮, $F_c =$ ৩১, $f_m =$ ২৫ এবং h = ৬।

মধ্যক $= L + \left(\frac{n}{2} - F_c\right) \times \frac{h}{f_m}$

$= ৪৮ + (৩৫ - ৩১) \times \frac{৬}{২৫} = ৪৮ + ৪ \times \frac{৬}{২৫}$

$= ৪৮ + ০{\cdot}৯৬$

$= ৪৮{\cdot}৯৬$

নির্ণেয় মধ্যক ৪৮·৯৬

কাজ : তোমাদের শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীকে নিয়ে ২টি দল গঠন কর। একটি সমস্যা সমাধানে প্রত্যেকের কত সময় লাগে (ক) তার গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি তৈরি কর, (খ) সারণি হতে মধ্যক নির্ণয় কর।

প্রচুরক

৮ম শ্রেণিতে আমরা শিখেছি যে, কোন উপাত্তে যে সংখ্যা সর্বাধিক বার উপস্থাপিত হয়, সেই সংখ্যাই উপাত্তের প্রচুরক। একটি উপাত্তের এক বা একাধিক প্রচুরক থাকতে পারে। কোন উপাত্তে যদি কোন সংখ্যাই একাধিকবার না থাকে তবে সেই উপাত্তের কোন প্রচুরক নেই। এখানে সূত্র ব্যবহার করে কীভাবে শ্রেণিবিন্যাস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয় করতে হয় তাই আলোচনা করা হলো।

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয়

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয়ের সূত্র হলো :

প্রচুরক = $L+\dfrac{f_1}{f_1+f_2}\times h$ যেখানে L প্রচুরক শ্রেণির অর্থাৎ যে শ্রেণিতে প্রচুরক অবস্থিত তার নিম্নমান,

f_1 = প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা–পূর্ববর্তী শ্রেণির গণসংখ্যা, f_2 = প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা–পরবর্তী শ্রেণির গণসংখ্যা এবং h = শ্রেণি ব্যাপ্তি।

উদাহরণ ১৩। নিচের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি থেকে প্রচুরক নির্ণয় কর।

শ্রেণি	গণসংখ্যা
৩১ – ৪০	৪
৪১ – ৫০	৬
৫১ – ৬০	৮
৬১ – ৭০	১২
৭১ – ৮০	৯
৮১ – ৯০	৭
৯১ – ১০০	৪

সমাধান :

প্রচুরক = $L+\dfrac{f_1}{f_1+f_2}\times h$

এখানে গণসংখ্যা সর্বাধিক ১২ আছে (৬১–৭০) শ্রেণিতে।

সুতরাং, L = ৬১

f_1 = ১২ – ৮ = ৪

f_2 = ১২ – ৯ = ৩

h = ১০

$\therefore$ প্রচুরক = ৬১ + $\dfrac{৪}{৪+৩}$ × ১০ = ৬১ + $\dfrac{৪}{৭}$ × ১০

= ৬১ + $\dfrac{৪০}{৭}$ = ৬১ + ৫·৭ = ৬৬·৭।

নির্ণেয় প্রচুরক ৬৬·৭১৪

উদাহরণ ১৪। নিচের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি থেকে প্রচুরক নির্ণয় কর :

শ্রেণি	গণসংখ্যা
৪১ – ৫০	২৫
৫১ – ৬০	২০
৬১ – ৭০	১৫
৭১ – ৮০	৮

সমাধান : এখানে গণসংখ্যা সর্বাধিক বার ২৫ আছে (৪১–৫০) শ্রেণিতে। সুতরাং, প্রচুরক এই শ্রেণিতে আছে।

আমরা জানি,

প্রচুরক = $L+\dfrac{f_1}{f_1+f_2}\times h$

এখানে, L = ৪১ [প্রথম শ্রেণিতে গণসংখ্যা বেশি হলে, পূর্ববর্তী শ্রেণির গণসংখ্যা শূন্য]

f_1 = ২৫ – ০ = ২৫

f_2 = ২৫ – ২০ = ৫

$\therefore$ প্রচুরক = ৪১ + $\dfrac{২৫}{২৫+৫}$ × ১০

= ৪১ + $\dfrac{২৫}{৩০}$ × ১০ = ৪১ + ৮·৩৩

= ৪৯·৩৩

নির্ণেয় প্রচুরক ৪৯·৩৩

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তে প্রথম শ্রেণি প্রচুরক শ্রেণি হলে, তার আগের শ্রেণির গণসংখ্যা শূন্য ধরতে হয়

উদাহরণ ১৫। নিচের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণির প্রচুরক নির্ণয় কর :

শ্রেণি	গণসংখ্যা
১১ − ২০	৪
২১ − ৩০	১৬
৩১ − ৪০	২০
৪১ − ৫০	২৫

সমাধান :

এখানে গণসংখ্যা সর্বাধিক বার ২৫ আছে (৪১−৫০) শ্রেণিতে। এই শ্রেণিতে প্রচুরক বিদ্যমান

আমরা জানি,

$$\text{প্রচুরক} = L + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times h$$

এখানে, $L = ৪১$

$f_1 = ২৫ - ২০ = ৫$

$f_2 = ২৫ - ০$ [শেষ শ্রেণি প্রচুরক শ্রেণি হলে, পরবর্তী শ্রেণির ঘটন সংখ্যা শূন্য ধরা হয়]

$h = ১০$

অতএব, প্রচুরক $= ৪১ + \frac{৫}{২৫+৫} \times ১০$

$= ৪১ + \frac{৫}{৩০} \times ১০$

$= ৪১ + \frac{৫}{৩} = ৪১ + ১.৬৭$

$= ৪২.৬৭$

নির্ণেয় প্রচুরক ৪২.৬৭ (প্রায়)।

অনুশীলনী ১৭

সঠিক উত্তরে টিক (√) চিহ্ন দাও :

১। নিচের কোনটি দ্বারা শ্রেণি ব্যাপ্তি বোঝায় ?

(ক) উপাত্তসমূহের মধ্যে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম উপাত্তের ব্যবধান

(খ) উপাত্তসমূহের মধ্যে প্রথম ও শেষ উপাত্তের ব্যবধান

(গ) প্রত্যেক শ্রেণির অন্তর্ভুক্ত বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম সংখ্যার পার্থক্য

(ঘ) প্রত্যেক শ্রেণির অন্তর্ভুক্ত বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম সংখ্যার সমষ্টি

২। উপাত্তসমূহ সারণিভুক্ত করা হলে প্রতি শ্রেণিতে যতগুলো উপাত্ত অন্তর্ভুক্ত হয় তার নির্দেশক নিচের কোনটি ?

(ক) শ্রেণি সীমা (খ) শ্রেণির মধ্যবিন্দু (গ) শ্রেণি সংখ্যা (ঘ) শ্রেণির গণসংখ্যা

৩। পরিসংখ্যানের অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জিভূত হয়। উপাত্তের এই প্রবণতাকে বলা হয়

(ক) প্রচুরক (খ) কেন্দ্রিয় প্রবণতা (গ) গড় (ঘ) মধ্যক

শীতকালে বাংলাদেশের কোনো একটি অঞ্চলের ১০ দিনের তাপমাত্রার (সেন্টিগ্রেড) পরিসংখ্যান হলো ১০°, ৯°, ৮°, ৬°, ১১°, ১২°, ৭°, ১৩°, ১৪°, ৫°। এই পরিসংখ্যানের প্রেক্ষিতে (৪–৬) পর্যন্ত প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও ।

৪। উপরের সংখ্যাসূচক উপাত্তের প্রচুরক কোনটি ?

(ক) ১২° (খ) ৫° (গ) ১৪° (ঘ) প্রচুরক নেই

৫। উপরের সংখ্যাসূচক উপাত্তের গড় তাপমাত্রা কোনটি ?

(ক) ৮° (খ) ৮.৫° (গ) ৯.৫° (ঘ) ৯°

৬। উপাত্তসমূহের মধ্যক কোনটি ?

(ক) ৯.৫° (খ) ৯° (গ) ৮.৫° (ঘ) ৮°

৭। সারণিভুক্ত শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের সংখ্যা হলো n , মধ্যক শ্রেণির নিম্নসীমা L , মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা F_c, মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা f_m এবং শ্রেণি ব্যাপ্তি h ; এই তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি মধ্যক নির্ণয়ের সূত্র ?

(ক) $L+\left(\frac{n}{2}-F_c\right)\times\frac{h}{f_m}$ (খ) $L+\left(\frac{n}{2}-f_m\right)\times\frac{h}{F_m}$

(গ) $L-\left(\frac{n}{2}-F_c\right)\times\frac{h}{f_m}$ (ঘ) $L-\left(\frac{n}{2}-f_n\right)\times\frac{h}{F_m}$

নিচে তোমাদের স্কুলের ৮ম শ্রেণির সমাপনী পরীক্ষায় বাংলায় প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা সারণি দেওয়া হলো। এই সারণি থেকে (৮–১৬)পর্যন্ত প্রশ্নের উত্তর দাও :

শ্রেণি ব্যাপ্তি	৩১–৪০	৪১–৫০	৫১–৬০	৬১–৭০	৭১–৮০	৮১–৯০	৯১–১০০
গণসংখ্যা	৬	১২	১৬	২৪	১২	৮	২
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	৬	১৮	৩৪	৫৮	৭০	৭৮	৮০

৮। উপাত্তসমূহের কয়টি শ্রেণিতে বিন্যস্ত করা হয়েছে ?

(ক) ৬ (খ) ৭ (গ) ৮ (ঘ) ৯

৯। সারণিতে উপস্থাপিত উপাত্তের শ্রেণি ব্যাপ্তি কত ?

(ক) ৫ (খ) ৯ (গ) ১০ (ঘ) ১৫

১০। ৪র্থ শ্রেণির মধ্যমান কত ?

(ক) ৭১.৫ (খ) ৬১.৫ (গ) ৭০.৫ (ঘ) ৭৫.৬

১১। উপাত্তের মধ্যক শ্রেণি কোনটি ?

(ক) ৪১–৫০ (খ) ৫১–৬০ (গ) ৬১–৭০ (ঘ) ৭১–৮০

১২। মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির যোজিত গণসংখ্যা কত ?

(ক) ১৮ (খ) ৩৪ (গ) ৫৮ (ঘ) ৭০

১৩। মধ্যক শ্রেণির নিম্নসীমা কত ?

(ক) ৪১ (খ) ৫১ (গ) ৬১ (ঘ) ৭১

১৪। মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা কত ?

(ক) ১৬ (খ) ২৪ (গ) ৩৪ (ঘ) ৫৮

১৫। উপস্থাপিত উপাত্তের মধ্যক কত ?

(ক) ৬৩ (খ) ৬৩.৫ (গ) ৬৫ (ঘ) ৬৫.৫

১৬। উপস্থাপিত উপাত্তের প্রচুরক কত ?

(ক) ৬১.৪ (খ) ৬১ (গ) ৭০ (ঘ) ৭০.৪

১৭। কোনো স্কুলের ১০ম শ্রেণির ৪৯ জন শিক্ষার্থীর ওজন (কিলোগ্রাম) হলো :

৪৫, ৫০, ৫৫, ৫১, ৫৬, ৫৭, ৫৬, ৬০, ৫৮, ৬০, ৬১, ৬০, ৬২, ৬০, ৬৩, ৬৪, ৬০, ৬১, ৬৩, ৬৬, ৬৭, ৬১, ৭০, ৭০, ৬৮, ৬০, ৬৩, ৬১, ৫০, ৫৫, ৫৭, ৫৬, ৬৩, ৬০, ৬২, ৫৬, ৬৭, ৭০, ৬৯, ৭০, ৬৯, ৬৮, ৭০, ৬০, ৫৬, ৫৮, ৬১, ৬৩, ৬৪।

(ক) শ্রেণি ব্যবধান ৫ ধরে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর।

(খ) সারণি থেকে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় কর।

(গ) গণসংখ্যা নিবেশন সারণিতে উপস্থাপিত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

১৮। ১০ম শ্রেণির ৫০ জন শিক্ষার্থীর গণিত বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	৩১–৪০	৪১–৫০	৫১–৬০	৬১–৭০	৭১–৮০	৮১–৯০	৯১–১০০
গণসংখ্যা	৬	৮	১০	১২	৫	৭	২

১৯। কোনো শ্রেণির ৬০ জন শিক্ষার্থীর ৫০ নম্বরের সময়িক পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি হলো :

প্রাপ্ত নম্বর	১–১০	১১–২০	২১–৩০	৩১–৪০	৪১–৫০
গণসংখ্যা	৭	১০	১৬	১৮	৯

উপাত্তের অজিভ রেখা আঁক।

২০। নিচে ৫০ জন শিক্ষার্থীর ওজনের (কেজি) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। মধ্যক নির্ণয় কর।

ওজন (কেজি)	৪৫	৫০	৫৫	৬০	৬৫	৭০
গণসংখ্যা	২	৬	৮	১৬	১২	৬

২১। তোমাদের শ্রেণির ৬০ জন শিক্ষার্থীর ওজনের (কেজি) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি হলো :

ব্যাপ্তি	৪৫–৪৯	৫০–৫৪	৫৫–৫৯	৬০–৬৪	৬৫–৬৯	৭০–৭৪
গণসংখ্যা	৪	৮	১০	২০	১২	৬
যোজিত ফল	৪	১২	২২	৪২	৫৪	৬০

(ক) উপাত্তের মধ্যক নির্ণয় কর।

(খ) উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয় কর।

২২। উপাত্তের ক্ষেত্রে প্রচুরক–

(i) কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ :

(ii) সবচেয়ে বেশী বার উপস্থাপিত মান

(iii) সবক্ষেত্রে অনন্য নাও হতে পারে

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii

গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

২৩। কোনো বিদ্যালয়ের বার্ষিক পরীক্ষায় ৯ম শ্রেণির 50 জন শিক্ষার্থীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বরগুলো নিম্নরূপ:

৭৬, ৬৫, ৯৮, ৭৯, ৬৪ ৬৮, ৫৬, ৭৩, ৮৩, ৫৭

৫৫, ৯২, ৪৫, ৭৭, ৮৭ ৪৬, ৩২, ৭৫, ৮৯, ৪৮

৯৭, ৮৮, ৬৫, ৭৩, ৯৩ ৫৮, ৪১, ৬৯, ৬৩, ৩৯

৮৪, ৫৬, ৪৫, ৭৩, ৯৩ ৬২, ৬৭, ৬৯, ৬৫, ৫৩

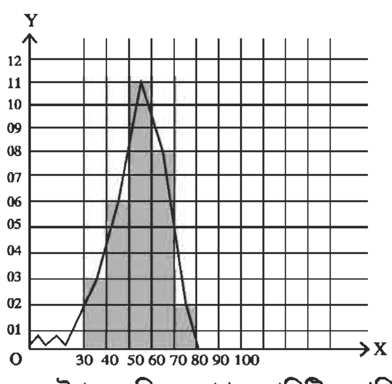
৭৮, ৬৪, ৮৫, ৫৩, ৭৩ ৩৪, ৭৫, ৮২, ৬৭, ৬২

ক. প্রদত্ত তথ্যটির ধরণ কীরূপ? কোন নিবেষণে একটি শ্রেণির গণসংখ্যা কী নির্দেশ করে ?

খ. উপর্যুক্ত শ্রেণি ব্যাপ্তি নিয়ে গণসংখ্যা নিবেষণ তৈরি কর।

গ. সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে প্রাপ্ত নম্বরের গড় নির্ণয় কর।

২৪।



ক. উপরের চিত্রে, প্রথম শ্রেণিটির শ্রেণি মধ্যমান ও শেষ শ্রেণিটির গণসংখ্যা কত?

খ. চিত্রে প্রদর্শিত তথ্যটিকে ছকের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

গ. 'খ'–অংশে প্রাপ্ত ছক থেকে নিবেষণটির মধ্যক নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ১

৪। (ক) $0\cdot1\dot{6}$ (খ) $0\cdot\dot{6}\dot{3}$ (গ) $3\cdot\dot{2}$ (ঘ) $3\cdot5\dot{3}$

৫। (ক) $\frac{2}{9}$ (খ) $\frac{35}{99}$ (গ) $\frac{2}{15}$ (ঘ) $3\frac{71}{90}$ (ঙ) $6\frac{769}{3330}$

৬। (ক) $2\cdot3\dot{3}\dot{3}$, $5\cdot2\dot{3}\dot{5}$ (খ) $7\cdot26\dot{6}$, $4\cdot23\dot{7}$ (গ) $5\cdot\dot{7}7777\dot{7}$, $8\cdot\dot{3}4343\dot{4}$, $6\cdot\dot{2}4524\dot{5}$

(ঘ) $12\cdot320\dot{0}\dot{0}$, $2\cdot199\dot{9}\dot{9}$, $4\cdot325\dot{5}\dot{6}$

৭। (ক) $0\cdot58\dot{9}$ (খ) $17\cdot117\dot{9}$ (গ) $0.94\dot{9}37300\dot{0}$

৮। (ক) $1\cdot3\dot{1}$ (খ) $1\cdot6\dot{6}\dot{5}$ (গ) $3\cdot13\dot{3}\dot{4}$ (ঘ) $6\cdot11\dot{0}6\dot{2}$

৯। (ক) $0.\dot{2}$ (খ) 2 (গ) $0.2\dot{0}7\dot{4}$ (ঘ) $12\cdot1\dot{8}\dot{5}$

১০। (ক) $0\cdot5$ (খ) $0\cdot2$ (গ) $5\cdot\dot{2}195\dot{1}$ (ঘ) $4\cdot\dot{8}$

১১। (ক) $3\cdot4641$, $3\cdot464$ (খ) $0\cdot5025$, $0\cdot503$ (গ) $1\cdot1595$, $1\cdot160$ (ঘ) $2\cdot2650$, $2\cdot265$

১২। (ক) মূলদ (খ) মূলদ (গ) অমূলদ (ঘ) অমূলদ (ঙ) অমূলদ (চ) মূলদ (ছ) মূলদ (জ) মূলদ

১৩। (ক) 9 (খ) 5

অনুশীলনী ২·১

১। (ক) $\{4, 5\}$ (খ) $\{\pm3, \pm4, \pm5, \pm6\}$ (গ) $\{6, 12, 18, 36\}$ (ঘ) $\{3, 4\}$

২। (ক) $\{x \in N : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $1 < x < 13\}$ (খ) $\{x \in N : x, 36$ এর গুণনীয়ক$\}$ (গ) $\{x \in N : x, 4$ এর গুণনিয়ক এবং $x \leq 40\}$ (ঘ) $\{x \in Z : x^2 \geq 16$ এবং $x^3 \leq 216\}$

৩। (ক) $\{1\}$ (খ) $\{1, 2, 3, 4, a\}$ (গ) {২} (ঘ) $\{2, 3, 4, a\}$ (ঙ) {২}

৫। $\{\{x, y\}, \{x\}, \{y\}, \varnothing\}$, $\{\{m, n, l\}, \{m, n\}, \{m, l\}, \{n, l\}, \{m\}, \{n\}, \{l\}, \varnothing\}$

৭। (ক) 2, 3 (খ) (c, a) (গ) $(1, 5)$

৮। (ক) $\{(a, b), (a, c)\}, \{(b, a), (c, a)\}$ (খ) $\{(4, x), (4, y), (5, x), (5, y)\}$ (গ) $\{(3, 3), (5, 3), (7, 3)\}$

৯। $\{1, 3, 5, 7, 9, 15, 35, 45\}$ এবং $\{1, 5\}$ ১০। $\{35, 105\}$ ১১। 5 জন

অনুশীলনী ২·২

৪। $\{(3,2),\ (4,2)\}$ ৫। $\{(2,4),\ (2,\ 6)\}$ ৬। $-7,\ 23,\ \frac{-7}{16}$ ৭। 2 ৮। 1 অথবা 2 অথবা 3 ৯। $\frac{2}{x^2}$

১১। (ক) $\{2\},\ \{1,\ 2,\ 3\}$ (খ) $\{-2,-1,0,1,2\},\ \{0,1,4\}$ (গ) $\left\{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{5}{2}\right\},\ \{0,\ 1,-1,\ 2,\ -2\}$

১২। (ক) $\{(-1,2),\ (0,1),\ (1,0),\ (2,-1)\}$, $\{-1,\ 0,\ 1,2\}$, $\{2,\ 1,\ 0,-1\}$

(খ) $\{(-1,-2),\ (0,\ 0),\ (1,\ 2)\}$, $\{-1,\ 0,\ 1\}$, $\{-2,\ 0,2\}$

অনুশীলনী ৩·১

১। (ক) $4a^2+12ab+9b^2$ (খ) $4a^2b^2+12ab^2c+9b^2c^2$ (গ) $x^4+\frac{4x^2}{y^2}+\frac{4}{y^4}$ (ঘ) $a^2+2+\frac{1}{a^2}$

(ঙ) $16y^2-40xy+25x^2$ (চ) $a^2b^2-2abc+c^2$ (ছ) $25x^4-10x^2y+y^2$

(জ) $x^2+4y^2+16z^2+4xy+16yz+8zx$ (ঝ) $9p^2+16q^2+25r^2+24pq-40qr-30pr$

(ঞ) $9b^2+25c^2+4a^2-30bc+20ca-12ab$ (ট) $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-2abxy+2bcyz-2cazx$

(ঠ) $a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-2ad-2bc+2bd-2cd$

(ড) $4a^2+9x^2+4y^2+25z^2+12ax-8ay-20az-12xy-30xz+20yz$ (ঢ) 10201

(ণ) 994009 (ত) 1014049

২। (ক) $16a^2$ (খ) $36x^2$ (গ) p^2+49r^2-14rp (ঘ) $36n^2-24pn+4p^2$ (ঙ) 100

(চ) 4410000 (ছ) 10 (জ) 3104

৩। ±16 ৪। ±1 ৫। $\pm3m$ ৬। 130 ৮। $\frac{1}{4}$ ১১। 19 ১২। 25 ১৩। 6 ১৪। 138

১৫। 9 ১৭। $(2a+b+c)^2-(b-a-c)^2$ ১৮। $(x-1)^2-8^2$ ১৯। $(x+5)^2-1^2$ ২০। (i) 3

২০। (ii) 1

অনুশীলনী ৩.২

১। (ক) $8x^3+60x^2+150x+125$ (খ) $8x^6+36x^4y^2+54x^2y^4+27y^6$

(গ) $64a^3-240a^2x^2+300ax^4-125x^6$ (ঘ) $343m^6-294m^4n+84m^2n^2-8n^3$

(ঙ) 65450827 (চ) 994011992

(ছ) $8a^3-b^3-27c^3-12a^2b-36a^2c+6ab^2+54ac^2-9b^2c-27bc^2+36abc$

(জ) $8x^3+27y^3+z^3+36x^2y+12x^2z+54xy^2+27y^2z+6xz^2+9yz^2+36xyz$

২। (ক) $8a^3$ (খ) $64x^3$ (গ) $8x^3$ (ঘ) 1 (ঙ) $8(b+c)^3$ (চ) $64m^3n^3$ (ছ) $2(x^3+y^3+z^3)$ (জ) $64x^3$

৩। 665 ৪। 54 ৫। 8 ৬। 42880 ৭। 1728 ১০। (ক) 3 (খ) 9 ১১। (ক) 133 (খ) 665

১২। a^3-3a ১৩। p^3+3p ১৪। $46\sqrt{5}$

অনুশীলনী ৩.৩

১। $(a+b)(a+c)$
২। $(b+1)(a-1)$
৩। $2(x-y)(x+y+z)$
৪। $b(x-y)(a-c)$
৫। $(3x+4)^2$
৬। $(a^2+5a-1)(a^2-5a-1)$
৭। $(x^2+2xy-y^2)(x^2-2xy-y^2)$
৮। $(ax+by+ay-by)(ax+bx-ay+bx)$
৯। $(2a-3b+2c)(2a-3b-2c)$
১০। $9(x+a)(x-a)(x+2a)(x-2a)$
১১। $(a+y+2)(a-y+4)$
১২। $(4x-5y)(4x+5y-2z)$
১৩। $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$
১৪। $(x+4)(x+9)$
১৫। $(x+2)(x-2)(x^2+5)$
১৬। $(a-18)(a-12)$
১৭। $(x^3y^3-3)(x^3y^3+2)$
১৮। $(a^4-2)(a^4+1)$
১৯। $(ab+7)(ab-15)$
২০। $(x+13)(x-50)$

২১। $(x+2)(x-2)(2x+3)(2x-3)$

২২। $2(2x-5)\ (3x-2)$

২৩। $y^2(x+1)(9x-14)$

২৪। $(x+3)(x-3)(4x^2+9)$

২৫। $(x+a)(ax+1)$

২৬। $(a^2+2a-4)(3a^2+6a-10)$

২৭। $(2z-3x-5)(10x+7z+3)$

২৮। $-(3a+17b)(9a+7b)$

২৯। $(x+ay+y)(ax-x+y)$

৩০। $3x(2x-1)(4x^2+2x+1)$

৩১। $(a+b)^2(a^4-2a^3b+6a^2b^2-2ab^3+b^4)$

৩২। $(x+2)(x^2+x+1)$

৩৩। $(a-3)(a^2-3a+3)$

৩৪। $(a-b)(2a^2+5ab+8b^2)$

৩৫। $(2x-3)(4x^2+12x+21)$

৩৬। $\frac{1}{27}(6a+b)(36a^2-6ab+b^2)$

৩৭। $\frac{1}{8}(2a-1)(4a^2+2a+1)$

৩৮। $\left(\frac{a^2}{3}-b^2\right)\left(\frac{a^4}{9}+\frac{a^2b^2}{3}+b^4\right)$

৩৯। $\left(2a-\frac{1}{2a}\right)\left(2a-\frac{1}{2a}+2\right)$

৪০। $(a+4)(19a^2-13a+7)$

৪১। $(x+6)(x-10)$

৪২। $(x^2+7x+4)(x^2+7x-18)$

৪৩। $(x^2-8x+20)(x^2-8x+2)$

অনুশীলনী ৩.৪

১। $(6x-1)(x-1)$

২। $(a+1)(3a^2-3a+5)$

৩। $(x+y)(x-3y)(x+2y)$

৪। $(x-6)(x+1)$

৫। $(2x-3)(x+1)$

৬। $(x-3)(3x+2)$

৭। $(x-2)(x+1)(x+3)$

৮। $(x-1)(x+2)(x+3)$

৯। $(a+3)(a^2-3a+12)$

১০। $(a-1)(a-1)(a^2+2a+3)$

১১। $(a+1)(a-4)(a+2)$

১২। $(x-2)(x^2-x+2)$

১৩। $(a-b)(a^2-6ab+b^2)$

১৪। $(x-3)(x^2+3x+8)$

১৫। $(x+y)(x+3y)(x+2y)$

১৬। $(x-2)(2x+1)(x^2+1)$

১৭। $(2x-1)(x+1)(x+2)(2x+1)$

১৮। $x(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

১৯। $(4x-1)(x^2-x+1)$

২০। $(2x+1)(3x+2)(3x-1)$

অনুশীলনী ৩.৫

১। (গ) ২। (ঘ) ৩। (খ) ৪। (খ)

৫। (ঘ) ৬। (গ) ৭। (গ) ৮। (ঘ)

৯। (ক) ১০। (গ) ১১। (ঘ) ১২। (খ)

১৩। (ক) ১৪। (খ) ১৫। (গ) ১৬। (খ)

১৭। (ক) ১৮। (খ) ১৯। (গ) ২০। (ঘ)

২১ (১) (গ), (২) (খ) ২১ (৩)। (ঘ) ২২। $\frac{2}{3}(p+r)$ দিনে ২৩। 5 ঘণ্টা

২৪। $\frac{xy}{x+y}$ দিনে ২৫। 95 জন

২৬। স্রোতের বেগ ঘণ্টায় $\frac{d}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$ কি.মি. এবং নৌকার বেগ ঘণ্টায় $\frac{d}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$ কি.মি.

২৭। দাঁড়ের বেগ 8 কি.মি./ঘণ্টা এবং স্রোতের বেগ 2 কি.মি./ঘণ্টা

২৮। $\frac{t_1t_2}{t_2-t_1}$ মিনিট ২৯। 240 লিটার ৩০। 10 টাকা। ৩১। 48 টাকা ৩২। (ক) 120 টাকা, (খ) 80 টাকা, (গ) 60 টাকা ৩৩। ক্রয়মূল্য 450 টাকা ৩৪। 4.625% ৩৫। 625 টাকা ৩৬। 28%

৩৭। 596.97 টাকা (প্রায়) ৩৮। 780 টাকা ৩৯। 61 টাকা

৪০। $\frac{px}{100+x}$ টাকা ভ্যাট ; ভ্যাটের পরিমাণ 300 টাকা।

অনুশীলনী ৪·১

১। 9 ২। $\frac{1}{2}$ ৩। 27 ৪। $\sqrt{7}$ ৫। $\frac{10}{7}$ ৬। $\frac{ab}{3a+2b}$ ৭। $\frac{a^8}{b^4}$

৮। 1 ৯। 4 ১০। $\frac{1}{9}$ ১৯। $\frac{3}{2}$ ২০। 3 ২১। 5 ২২। 0, 1

অনুশীলনী ৪·২

১। (ক) 4 (খ) $\frac{1}{3}$ (গ) $\frac{1}{2}$ (ঘ) 4 (ঙ) $\frac{5}{6}$

২। (ক) 125 (খ) 5 (গ) 4

৪। (ক) $\log 2$ (খ) $\frac{13}{15}$ (গ) 0

অনুশীলনী ৪·৩

১। খ ২। ঘ ৩। গ ৪। ক ৫। গ ৬। ক ৭। ঘ ৮। (১) ঘ (২) গ (৩) ক

৯। (ক) $6\cdot530\times10^{3}$ (খ) $6\cdot0831\times10^{1}$ (গ) $2\cdot45\times10^{-4}$ (ঘ) $3\cdot75\times10^{7}$ (ঙ) $1\cdot4\times10^{-7}$

১০। (ক) 100000 (খ) 0.00001 (গ) 25300 (ঘ) $0\cdot009813$ (ঙ) $0\cdot0000312$

১১। (ক) 3 (খ) 1 (গ) 0 (ঘ) $\overline{2}$ (ঙ) $\overline{5}$

১২। (ক) পূর্ণক 1, অংশক $\cdot43136$ (খ) পূর্ণক 1, অংশক $\cdot80035$ (গ) পূর্ণক 0, অংশক $\cdot14765$

(ঘ) পূর্ণক $\overline{2}$, অংশক $\cdot65896$ (ঙ) পূর্ণক $\overline{4}$, অংশক $\cdot82802$

১৩। (ক) $1\cdot66706$ (খ) $\overline{1}\cdot64562$ (গ) $0\cdot81358$ (ঘ) $\overline{3}\cdot78888$

১৪। (ক) $0\cdot95424$ (খ) $1\cdot44710$ (গ) $1\cdot62325$

১৫। ক. $2^{3}\cdot5^{3}$ খ. $6\cdot25\times10^{1}$ গ. পূর্ণক 1, অংশক $\cdot79588$

অনুশীলনী ৫·১

১। 1 ২। ab ৩। -6 ৪। -1 ৫। $-\frac{3}{5}$ ৬। $-\frac{5}{2}$ ৭। $\frac{a+b}{2}$ ৮। $a+b$

৯। $\frac{a+b}{2}$ ১০। $\sqrt{3}$ ১১। $\{2\}$ ১২। $\{4(1+\sqrt{2})\}$ ১৩। $\{-a\}$ ১৪। $\varnothing$

১৫। $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ ১৬। $\left\{\frac{m+n}{2}\right\}$ ১৭। $\left\{-\frac{7}{2}\right\}$ ১৮। $\{6\}$ ১৯। $\left\{-(a^2+b^2+c^2)\right\}$

২০। 28, 70 ২১। $\frac{3}{4}$ ২২। 72 ২৩। $21x$ ২৪। 256 টাকা ২৫। .9

২৬। পঁচিশ পয়সার মুদ্রা 100টি, পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রা 20টি।

২৭। 120 কিলোমিটার

অনুশীলনী ৫·২

১। গ ২। খ ৩। খ ৪। গ ৫। ঘ ৬। খ ৭। ক ৮। (১) ঘ (২) গ (৩) ক

৯। $-2, \sqrt{3}$ ১০। $-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ১১। $-1, 6$ ১২। ± 7 ১৩। $-6, \frac{3}{2}$ ১৪। $1, -\frac{3}{20}$

১৫। ± 11 ১৬। $0, \frac{2}{3}$ ১৭। $\pm\sqrt{ab}$ ১৮। $0, a+b$ ১৯। $\left\{3, -\frac{1}{2}\right\}$ ২০। $\left\{-\frac{2}{3}, 2\right\}$

২১। $\{-a, -b\}$ ২২। $\{1, -1\}$ ২৩। $\{1\}$ ২৪। $\{0, 2a\}$ ২৫। $\left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$ ২৬। 78 বা 87

২৭। দৈর্ঘ্য 16 মিটার, প্রস্থ 12 মিটার ২৮। 9 সে.মি., 12 সে.মি. ২৯। 27 সে.মি.

৩০। 21 জন, 20 টাকা করে। ৩১। 70 ৩২। ক. $70-9x, 9x+7$ খ. 34 গ. 5 সে.মি., $5\sqrt{2}$ সে.মি. ৩৩। খ. 5 সে.মি. গ. $2:5:8$

অনুশীলনী–৯.১

২। $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}, \cot A = \frac{\sqrt{7}}{3}, \sec A = \frac{4}{\sqrt{7}}, \operatorname{cosec} A = \frac{4}{3}$

৩। $\sin A = \frac{15}{17}, \cos A = \frac{8}{17}$ ৪। $\sin\theta = \frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{12}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}$

২২। $\frac{1}{2}$ ২৩। $\frac{3}{4}$ ২৪। $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

অনুশীলনী ৯.২

৫। $\frac{1}{2}$ ৬। $\frac{3}{4}$ ৭। $\frac{23}{5}$ ৮। $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ১৭। $A=30^0, B=30^0$ ১৮। $A=30^0$ ১৯। $A=37\frac{1^0}{2}, B=7\frac{1^0}{2}$

২১। $\theta=90^0$ ২২। $\theta=60^0$ ২৩। $\theta=60^0$ ২৪। $\theta=45^0$ ২৫। $\frac{7}{2}$

অনুশীলনী ১০

১–৬ নিজে কর।

৭। 45.033 মিটার (প্রায়) ৮। 34.641 মিটার (প্রায়) ৯। 12.728 মিটার (প্রায়) ১০। 10 মিটার

১১। 21.651 মিটার (প্রায়) ১২। 141.962 মিটার (প্রায়) ১৩। 27.713 মিটার (প্রায়) এবং 16 মিটার

১৪। 34.298 মিটার (প্রায়) ১৫। 44.785 মিটার (প্রায়) ১৬। (খ) 259.808 মিটার

অনুশীলনী ১১·১

১। $a^2 : b^2$, ২। $\sqrt{\pi} : 2$, ৩। 45, 60, ৪। 20%, ৫। 18 : 25, ৬। 13 : 7, ৮। (i) $\frac{3}{4}$, (ii) $\frac{2ab}{b^2+1}$,

(iii) $x = \pm\sqrt{2ab - b^2}$, (iv) 10, (v) $\frac{b}{2a}\left(c+\frac{1}{c}\right)$, (vi) $\frac{1}{2}$, 2.

অনুশীলনী ১১·২

১। খ ২। গ ৩। গ ৪। খ ৫। খ

৬। 24%, ৭। 70%, ৮। 70%, ৯। ক 40 টাকা, খ 60 টাকা, গ 120 টাকা, ঘ 80 টাকা, ১০। 200, 240, 250, ১১। 9 সে. মি., 15 সে. মি., 21 সে. মি., ১২। 315 টাকা, 336 টাকা, 360 টাকা, ১৩। 140, ১৪। 81 রান, 54 রান, 36 রান, ১৫। কর্মকর্তা 24000 টাকা, করণিক 12000 টাকা, পিওন 6000 টাকা, ১৬। 70, ১৭। 44%, ১৮। 1% হ্রাস পাবে, ১৯। 532 কুইন্টাল, ২০। 8 : 9, ২১। 1440 বর্গমিটার, ২২। 13 : 12.

অনুশীলনী ১২·১

১। সমঞ্জস, অনির্ভরশীল, একটিমাত্র সমাধান ২। সমঞ্জস, নির্ভরশীল, অসংখ্য সমাধান ৩। অসমঞ্জস, অনির্ভরশীল, সমাধান নেই ৪। সমঞ্জস, নির্ভরশীল, অসংখ্য সমাধান ৫। সমঞ্জস, অনির্ভরশীল, একটিমাত্র সমাধান ৬। অসমঞ্জস, অনির্ভরশীল, সমাধান নেই ৭। অসমঞ্জস, নির্ভরশীল, অসংখ্য সমাধান ৮। সমঞ্জস, অনির্ভরশীল, একটিমাত্র সমাধান ৯। সমঞ্জস, অনির্ভরশীল, একটিমাত্র সমাধান ১০। সমঞ্জস, অনির্ভরশীল, একটিমাত্র সমাধান।

অনুশীলনী ১২·২

১। $(4,-1)$ ২। $\left(\frac{6}{5},\frac{6}{5}\right)$ ৩। (a,b) ৪। $(4,-1)$ ৫। $(1, 2)$ ৬। $\left(\frac{c(b-c)}{a(b-a)},\frac{c(c-a)}{b(b-a)}\right)$ ৭। $\left(-\frac{17}{2},4\right)$

৮। $(2, 3)$ ৯। $(3, 2)$ ১০। $\left(\frac{5}{2},-\frac{22}{3}\right)$ ১১। $(1, 2)$ ১২। $(2,-1)$ ১৩। (a, b) ১৪। $(2, 4)$ ১৫। $(4, 5)$

অনুশীলনী ১২·৩

১। $(2, 2)$ ২। $(2, 3)$ ৩। $(-7, 3)$ ৪। $(4, 5)$ ৫। $(2, 3)$ ৬। $(1.5, 1.5)$ ৭। $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ ৮। $(2, 6)$ ৯। -2

১০। 2

অনুশীলনী ১২·৪

১। ক ২। গ ৩। খ ৪। ঘ ৫। খ ৬। খ ৭(১)। গ ৭(২)। ক ৭(৩) ঘ ৮। $\frac{7}{9}$ ৯। $\frac{15}{26}$ ১০। 27

১১। 37 বা 73 ১২। 30 বছর ১৩। দৈর্ঘ্য 17 মিটার, প্রস্থ 9 মিটার ১৪। নৌকার বেগ ঘন্টায় 10 কি. মি., স্রোতের বেগ ঘন্টায় 5 কি. মি. ১৫। চাকরি শুরুর বেতন 4000 টাকা, বার্ষিক বেতনবৃদ্ধি 125 টাকা।

১৬। ক. একটি খ. $(4, 6)$ গ. 30 বর্গ একক ১৭। ক. $\frac{x+7}{y}=2, \frac{x}{y-2}=1$, খ. $(3, 5), \frac{3}{5}$

অনুশীলনী ১৩·১

১। -7 এবং -75, ২। 129 তম, ৩। 100 তম, ৪। p^2+pq+q^2, ৫। 0, ৬। n^2, ৭। 360, ৮। 320, ৯। 42, ১০। 1771, ১১। -620, ১২। 18, ১৩। 50, ১৪। $2+4+6+\ldots\ldots$, ১৫। 110, ১৬। 0, ১৭। $-(m+n)$, ২০। 50টি।

অনুশীলনী ১৩·২

১। গ ২। খ ৩। গ ৪। গ

৫। $\frac{1}{2}$, ৬। $\frac{3}{2}(3^{14}-1)$, ৭। 9ম পদ, ৮। $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ৯। 9ম পদ, ১০। $x=15,\ y=45$, ১১। $x=9,\ y=27,\ z=81$, ১২। 86, ১৩। 1, ১৪। $55\log 2$, ১৫। $650\log 2$, ১৬। $n=7$, ১৭। 0, ১৮। $n=6,\ S=21$, ১৯। $n=5,\ S=55$, ২১। 20, ২২। 24.47 মি. মি. (প্রায়)

অনুশীলনী ১৬·১

১। 20 মিটার, 15 মিটার ২। 12 মিটার ৩। 12 বর্গমিটার ৪। $327\cdot26$ বর্গ সে.মি. (প্রায়) ৫। 5 মিটার

৬। 30^o ৭। 36 বা 12 সে.মি. ৮। 12 বা 16 মিটার ৯। $44\cdot44$ কিলোমিটার (প্রায়)

১০। $24\cdot249$ সে.মি. (প্রায়), $254\cdot611$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

অনুশীলনী ১৬·২

১। 96 মিটার ২। 1056 বর্গমিটার ৩। 30 মিটার ও 20 মিটার ৪। 400 মিটার

৫। 6400 টি ৬। 16 মিটার ও 10 মিটার ৭। 16·5 মিটার ও 22 মিটার ৮। 35·35 মিটার (প্রায়)

৯। 48·66 সে.মি. (প্রায়) ১০। 72 সে.মি., 1944 বর্গ সে.মি. ১১। 17 সে.মি. ও 9 সে.মি.

১২। 95·75 বর্গ সে.মি. (প্রায়) ১৩। 6·36 বর্গমিটার (প্রায়)।

অনুশীলনী ১৬.৩

১। 32·987 সে.মি. (প্রায়) ২। 31·513 মিটার (প্রায়) ৩। 20·008 (প্রায়)। ৪। 128·282 বর্গ সে.মি. (প্রায়) ৫। 7·003 মিটার (প্রায়) ৬। 175·93 মিটার (প্রায়) ৭। 20 বার ৮। 49·517 মিটার (প্রায়) ৯। $3\sqrt{3}:\pi$

অনুশীলনী ১৬·৪

৮। 636 বর্গমিটার, 20·5 মিটার, 864 ঘনমিটার ৯। 14040 বর্গ সে.মি. ১০। 12 মিটর, 4 মিটার ১১। 1 সে.মি. ১২। 300000টি ১৩। 34·641 সে.মি. (প্রায়) ১৪। 534·071 বর্গসে.মি.(প্রায়), 942·48 ঘন সে.মি. (প্রায়) ১৫। 5·305 বর্গ সে.মি., 3 সে.মি. ১৬। 7823.591 বর্গ সে.মি.

১৭। 147·027 কিলোগ্রাম (প্রায়)

অনুশীলনী ১৭

১। (গ) ২। (খ) ৩। (খ) ৪। (ঘ) ৫। (গ) ৬। (ক) ৭। (ক) ৮। (খ) ৯। (গ)

১০। (গ) ১১। (গ) ১২। (গ) ১৩। (গ) ১৪। (খ) ১৫। (খ) ১৬। (ক) ২০। মধ্যক ৬০

২১। (ক) ৬২ কেজি, (খ) ৬২.৮ কেজি

২০১৬
শিক্ষাবর্ষ
৯-১০ গণিত

সমৃদ্ধ বাংলাদেশ গড়ে তোলার জন্য যোগ্যতা অর্জন কর
– মাননীয় প্রধানমন্ত্রী শেখ হাসিনা

জ্ঞান মানুষের অন্তরকে আলোকিত করে

২০১০ শিক্ষাবর্ষ থেকে সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য

মুদ্রণে :